

الگوریتم گاسپر برای مجموع گیری

حسین تیموری فعال

چکیده

در سال های اخیر استفاده از سیستم های جبر رایانه ای همانند میپل و ممتیکا در آموزش و پژوهش علوم ریاضی و رایانه فراگیر شده است. در این مقاله، ما تکنیک اثبات رایانه ای معروف به الگوریتم گاسپر را معرفی می کنیم که نه تنها می تواند برای افزایش کیفیت آموزش مفاهیم ریاضیات گسسته به دانشجویان رشته های علوم ریاضی و رایانه مورد استفاده قرار گیرد بلکه می تواند به عنوان یک ابزار کمکی مورد استفاده پژوهشگران این رشته ها نیز واقع شود. برای درک بهتر این الگوریتم زیبا چندین مثال به همراه اجرای آنها در سیستم جبر رایانه ای میپل و بسته ی نرم افزاری ابزارهای مجموع گیری^۱ در پایان مقاله آورده شده است.

۱ مقدمه و معرفی

در سال های اخیر شاهد رشد فزاینده ای در استفاده از تکنولوژی در تدریس مفاهیم علوم ریاضی و رایانه هستیم. دامنه ی استفاده از این تکنولوژی ها می تواند از ماشین های حساب صفحه کوچک همراه با امکانات رسم نمودار در مدارس شروع شده و تا بکارگیری سیستم های جبر رایانه ای نظیر میپل، ممتیکا و حتی متلب در دانشگاه ها ادامه یابد. این مساله تا جایی اهمیت پیدا کرده است که کنسول ملی معلمان ریاضی ایالات متحده ی آمریکا در استانداردهای خود استفاده از تکنولوژی رایانه ای را به عنوان یک ابزار ضروری در یاد دادن و یادگیری ریاضی الزامی کرده است. استفاده از تکنولوژی آموزشی برای هر دوی یاد دهنده و یادگیرنده بسیار مفید خواهد بود. از یک سو این تکنولوژی ها به معلمان و اساتید برای توسعه ی ابزارهای خلاقانه و کارآمد در جهت تدریس انواع مباحث علوم ریاضی و رایانه کمک کرده و از سوی دیگر به دانش آموزان و دانشجویان فرصت کافی برای یادگیری مفاهیم مختلف ریاضی و رایانه ای را به روش مکاشفه ای از طریق شهود حاصل از نمودارهای و الگوریتم های رایانه ای فراهم می آورند. در واقع این باور ایجاد شده است که استفاده از تکنولوژی های آموزشی سطح علاقمندی و فنون حل - مساله در میان دانشجویان را افزایش می دهد.

1. SumTools

یکی از دلایلی همراه کردن اثباتهای رایانه ای در ریاضیات گسسته گسترش و ایجاد تنوع در مثال هایی است که در آموزش مفاهیمی نظیر استقراء و روابط بازگشتی به کار می روند. در واقع به خاطر ورود سیستم های جبر رایانه ای به عرصه ی علم امروزه ما می توانیم مثال های نابديهی زیادی را برای تدریس مفاهیم به کار برده و یک فضای شبه پژوهشی برای دانشجویان فراهم کنیم که در آن بتوانند خود به آزمایش و حدس در مورد گزاره های ریاضی بپردازند.

یکی از رده مساله هایی که به طور گسترده ای در برنامه ی آموزشی ریاضیات گسسته مورد بحث و گفتگو قرار می گیرد شامل اثبات شکل های بسته ^۲ برای مجموع های متناهی دنباله های یک متغیره با استفاده از استقراء می باشد. اگر در مساله ی مطرح شده نظیر مثال زیر

$$\sum_{i=0}^n (2i + 1) = (n + 1)^2,$$

سمت راست مجموع به شکل بسته داده شده باشد آنگاه مشکلی برای استفاده از استقراء وجود ندارد. اما در مثال هایی نظیر مثال زیر

$$\sum_{k=1}^n (k + 1) \binom{n}{k},$$

دانشجو ابتدا باید یک شکل بسته برای این مجموع را حدس زده و سپس به اثبات درستی آن بپردازد (البته اگر حدسش درست باشد). درستی حدس ارتباط خیلی نزدیکی با تجربه و نبوغ دانشجو دارد و در خیلی موارد می تواند کاری بسیار سخت و ملال آور باشد. این دقیقاً جایی است که تکنولوژی (سیستم جبر رایانه ای) می تواند به کمک دانشجو بیاید و به وی برای یافتن حدس درست و یا حتی ارائه ی جواب درست سمت راست مجموع کمک کند.

دلیل دیگر برای آموزش فنون اثبات رایانه ای فراهم ساختن فرصتی برای دانشجویان (بویژه دانشجویان کارشناسی) برای تشریک مساعی در پژوهش در زمینه ی علوم ریاضی و رایانه است که خروجی کار می تواند بعضی نتایج جدید قابل چاپ باشد.

در میان الگوریتمهای مجموع گیری ^۳ دو الگوریتمی که به طور گسترده مورد استفاده قرار می گیرند الگوریتم گاسپر و الگوریتم ویلف - زیلبرگر [۱] می باشند. در بخش های بعدی این مقاله ما ایده های اصلی الگوریتم گاسپر را بیان و با چندین مثال استفاده از آن را تشریح می نماییم. الگوریتم دوم موضوع مقاله بعدی نویسنده در زمینه ی پژوهشی اثباتهای رایانه ای خواهد بود.

². Closed forms

³. Summation Algorithms

برای آن که بحث در مورد الگوریتم گاسپر قابل فهم تر گردد در این بخش سعی می کنیم که به طور اجمالی خواستگاه مساله ی مجموع گیری گسسته برای توابع تک متغیره را مورد بررسی قرار دهیم. در واقع می خواهیم نشان دهیم که چگونه می توان با الهام گرفتن از ریاضیات پیوسته به ایده هایی (با اجرای الگوریتمی) در ریاضیات گسسته برسیم.

یادآوری می کنیم که در ریاضیات عمومی دوره کارشناسی قضیه ی اساسی حسابان را به صورت زیر فرا گرفتید:

قضیه ۱.۲ (قضیه اساسی حسابان). فرض کنید $f(x)$ یک تابع پیوسته بر بازه ی $[a, b]$ باشد. اگر تابع $F(x)$ موجود باشد بقسمی که $F'(x) = f(x)$ آنگاه داریم

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

در قضیه ی بالا تابع F را پاد مشتق و یا انتگرال نامعین تابع مفروض f می نامند. به نظر می رسد که با شبیه سازی گسسته ی عملگر مشتق می توان مشابه روش بالا را برای محاسبه ی مجموع ها نیز به کار برد. فرض کنید می خواهیم یک شکل بسته برای مجموع زیر

$$\sum_{k=m}^{n-1} F(k),$$

بدست آوریم. یک راهکار خوب برای حل این مساله این است که تابع گسسته ی دیگری مانند $G(k)$ بیابیم بقسمی که

$$F(k) = G(k+1) - G(k). \quad (1.2)$$

(اصطلاحاً می گوئیم تابع F مشتق گسسته ی تابع G است). آنگاه مجموع بدست آمده به صورت مجموع تلسکوپی زیر

$$\sum_{k=m}^{n-1} F(k) = \sum_{k=m}^{n-1} G(k+1) - G(k) = G(n) - G(m).$$

در می آید. در اینجا مشاهده می کنیم که تابع گسسته ی $G(k)$ همان نقش مشابه تابع اولیه ی $F(t)$ را بازی می کند. پس می گوئیم تابع G تابع پاد تفاضل یا مجموع نامعین^۴ تابع F می باشد اگر

$$\sum_{k=m}^{n-1} F(k) = G(n) - G(m).$$

بنابراین قضیه ی اساسی حسابان تفاضلی را می توان به صورت زیر بیان کرد:

قضیه ۲.۲ (قضیه ی اساسی حسابان تفاضلی). برای تابع گسسته ی مفروض $F(n)$ ، اگر تابع گسسته ی $G(n)$ وجود داشته باشد، قسمی که برای هر عدد صحیح نامنفی n داشته باشیم $G(n+1) - G(n) = F(n)$ ، آنگاه داریم

$$\sum_{k=m}^{n-1} F(k) = G(n) - G(m). \quad (2.2)$$

مثال ۳.۲. برای تابع گسسته ی $F(n) = 2^n$ از آنجا که داریم

$$2^{n+1} - 2^n = 2^n,$$

پس تابع $G(n) = 2^n$ یک تابع تفاضل $F(n)$ بوده و در نتیجه طبق قضیه ی اساسی حسابان تفاضلی داریم

$$\sum_{k=0}^n 2^k = 2^{n+1} - 2^0 = 2^{n+1} - 1.$$

مثال ۴.۲. برای تابع گسسته ی $F(n) = n$ چون داریم $2n(n+1) - n(n-1) = 2n$ پس تابع $G(n) = \frac{n(n-1)}{2}$ یک تابع تفاضل $F(n)$ می باشد. در نتیجه دوباره با توجه به قضیه ی اساسی حسابان تفاضلی داریم

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{k(k-1)}{2} \Big|_{k=n+1} - \frac{k(k-1)}{2} \Big|_{k=1} = \frac{(n+1)n}{2},$$

که فرمول معروف کارل فردریش گوس ریاضیدان آلمانی برای مجموع n - جمله ی نخست اعداد طبیعی می باشد.

لازم به ذکر است که از ریاضیات عمومی و نظریه معادلات دیفرانسیل می دانیم که برای یک تابع دلخواه $f(t)$ لزوماً تابع اولیه ی $F(t)$ وجود ندارد و حتی اگر وجود داشته باشد یافتن آن کاری اصلاً ساده نیست. پس سوال بسیار مهمی که در حالت گسسته مطرح می شود این است که برای چه توابعی، تابع تفاضل موجود است و در صورت وجود چگونه می توان آن را یافت. گاسپر در پاسخ به این سوال بود که الگوریتم خود را مطرح نمود.

۳ الگوریتم گاسپر

در این بخش به معرفی مبانی نظری الگوریتم مجموع گیری زیبای گاسپر و چگونگی به کار گیری آن در عمل (اجرای آن روی یک سیستم جبر رایانه ای) می پردازیم. برای آگاهی از جزئیات بیشتر کار نظیر اثبات ها به مقاله ی اصلی گاسپر [۲] مراجعه کنید.

۱.۳ اساس کار الگوریتم گاسپر

ابتدا تعریف مهم زیر را یاد آوری می کنیم که در علوم محاسباتی از اهمیت ویژه ای برخوردار است.

تعریف ۱.۳ (عبارت فوق هندسی). طبق تعریف می گوییم عبارت $F(k)$ یک عبارت فوق هندسی است، اگر کسر زیر

$$\frac{F(k+1)}{F(k)}$$

یک کسر گویا باشد که متحد با صفر نیست. یعنی کسری که صورت و مخرج آن چند جمله ای هایی از k هستند.

در واقع تعریف بالا چیزی جز تعمیم مفهوم تصاعد هندسی در دبیرستان نیست.

مثال ۲.۳. فرض کنید $F(k) = 3^k$. آنگاه کسر $\frac{3^{k+1}}{3^k} = 3$ بوضوح یک کسر گویا است.

مثال ۳.۳. فرض کنید $F(k) = k(k+1)2^k$. آنگاه داریم

$$\frac{F(k+1)}{F(k)} = \frac{(k+1)(k+2)2^{k+1}}{k(k+1)2^k} = \frac{2(k+2)}{k},$$

که مجدداً یک کسر گویا می باشد.

گاسپر [۲] در یک مقاله زیبا که در مجله ی اکادمی علوم ملی آمریکا در سال ۱۹۷۸ به چاپ رساند، الگوریتم تصمیم زیبای زیر را ارائه داد:

الگوریتم گاسپر:

فرض کنید عبارت $F(k)$ یک عبارت فوق هندسی باشد. اگر یک عبارت فوق هندسی دیگری مانند $G(k)$ موجود باشد به قسمی که $G(k+1) - G(k) = F(k)$ ، آنگاه الگوریتم گاسپر آن را خواهد یافت. اگر الگوریتم گاسپر شکست بخورد، ثابت می شود که چنین $G(k)$ ایی اساساً وجود ندارد. زیبایی داستان این است که چنین الگوریتمی می تواند به یک برنامه ی رایانه ای تبدیل شود و تمام کار را رایانه برای شما انجام دهد.

مراحل اجرای الگوریتم گاسپر به صورت زیر است: می خواهیم یک شکل بسته برای مجموع

$$\sum_k F(k),$$

با جمعوند فوق هندسی $F(k)$ بیابیم.

۱. نسبت کسر $\frac{F(k+1)}{F(k)}$ را به صورت زیر بیان کنید:

$$\frac{F(k+1)}{F(k)} = \frac{p(k+1)q(k)}{p(k)r(k+1)}, \quad (1.3)$$

که در آن p, q, r چند جمله ای هایی هستند که در شرط زیر صدق می کنند:

اگر α و β چنان یافت شوند که

$$(k+\alpha) \mid q(k), \quad (k+\beta) \mid r(k), \quad (2.3)$$

آنگاه نتیجه بگیریم که $\alpha - \beta$ یک عدد صحیح مثبت نیست.

اکنون، با قرار دادن $p(k) = 1$ به عنوان مقدار اولیه کار خود را شروع می کنیم. اگر شرط (۲.۳) با α و β ایی که $\alpha - \beta = N > 0$ نقض شد، آنگاه عاملهای درجه اول $(k+\alpha)$ و $(k+\beta)$ را بترتیب از $q(k)$ و $r(k)$ کنار گذاشته و خارج قسمت های باقی مانده را $q(k)$ و $r(k)$ جدید می نامیم. مقدار جدید $p(k)$ را نیز با مقدار عبارت زیر جایگزین می کنیم:

$$p(k)(k+\alpha-1)_{(N-1)} = p(k)(k+\alpha-1)(k+\alpha-2)\cdots(k+\beta+1).$$

نکته ی مهم و اساسی این است که مقادیر جدید سه چند جمله ای p, q, r هنوز در تساوی (۱.۳) صدق می کنند. عمل فوق را تا زمانی که شرط (۲.۳) ارضاء شود، تکرار کنید.

۲. اگر امکان داشته باشد، عبارت فوق هندسی مانند $G(k)$ بیابید، به قسمی که

$$G(k+1) - G(k) = F(k). \quad (3.3)$$

در واقع، دیده می شود که عبارت فوق هندسی $G(k)$ باید به شکل کلی زیر باشد

$$G(k) = \frac{r(k)F(k)s(k)}{p(k)}, \quad (4.3)$$

که در آن $s(k) = \alpha_d k^d + \cdots + \alpha_0$ ($\alpha_0 \neq 0$) چند جمله ای است که در تساوی زیر

$$p(k) = q(k)s(k+1) - r(k)s(k), \quad (5.3)$$

صدق می نماید. تساوی (۵.۳) نتیجه ی جایگذاری معادله ی (۴.۳) در (۳.۳) می باشد.

۳. درجه ی $d = \deg(s(k))$ را تعیین کنید: به این منظور، فرض می کنیم

$$Q(k) = q(k) - r(k), \quad R(k) = q(k) + r(k),$$

و اتحاد (۵.۳) را به صورت زیر

$$2p(k) = Q(k)[s(k+1) + s(k)] + R(k)[s(k+1) - s(k)]. \quad (۶.۳)$$

بازنویسی می کنیم. اکنون، توجه کنید که

$$\deg(s(k+1) + s(k)) = d, \quad \deg(s(k+1) - s(k)) = d - 1.$$

در ادامه، دو حالت تشخیص می دهیم

(آ) اگر $\deg(Q) \geq \deg(R)$ ، آنگاه عبارت سمت راست (۶.۳) دارای درجه ی $\deg(Q) + d$ می باشد. پس $d = \deg(p) - \deg(Q)$. در غیر این صورت، داریم $\deg(Q) < \deg(R)$.

(ب) در غیر این صورت، فرض کنید $\deg(R) = d'$. در نتیجه، داریم $\deg(Q) \leq d' - 1$. پس، می توان نوشت

$$Q(k) = \lambda' k^{d'-1} + \dots,$$

$$R(k) = \lambda k^{d'} + \dots.$$

بنابراین، سمت راست اتحاد (۶.۳) برابر است با

$$(2\lambda' \alpha_d + \lambda d \alpha_d) k^{d+d'-1} + \dots.$$

دو حالت امکانپذیر است:

$$2\lambda' + \lambda d \neq 0 \quad \Rightarrow \quad d = \deg p - \deg R + 1,$$

$$2\lambda' + \lambda d = 0 \quad \Rightarrow \quad d = -\frac{2\lambda'}{\lambda}.$$

۴. می دانیم که $d = \deg(s(k))$ ، پس ما چند جمله ای

$$s(k) = \alpha_d k^d + \dots + \alpha_0,$$

در معادله ی (۵.۳) جایگذاری کرده و برای تمام ضرایب (به روش ضرایب نامعین) آن را حل می کنیم. از اینجا،

$$G(k) = \frac{r(k)F(k)s(k)}{p(k)},$$

بدست می آید به قسمی که $G(k+1) - G(k) = F(k)$.

۲.۳ الگوریتم گاسپر در عمل

در این بخش ما مثال های جالبی به همراه اجرای رایانه ای آن ها در سیستم جبر رایانه ای میپل ارائه می دهیم.

مثال ۴.۳. یک فرمول بسته برای مجموع

$$\sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{n}{k}, \quad (n > 0)$$

بدست آورید.
حل. داریم:

$$F(k) = (-1)^k \binom{n}{k}.$$

$$\frac{F(k+1)}{F(k)} = \frac{k-n}{k+1}.$$

$$p(k) = 1, \quad q(k) = k-n, \quad r(k) = k.$$

• $(k-n)|q(k)$ و $k|r(k)$ ، اما $-n-0$ یک عدد صحیح مثبت نیست. بنابراین، قیود (۱.۳) و (۲.۳) ارضاء می شوند.

$$G(k) = (-1)^k k \binom{n}{k} s(k)$$

$$Q(k) = q(k) - r(k) = -n, \quad R(k) = q(k) + r(k) = 2k - n, \\ \text{بنابراین، } \deg(Q) < \deg(R) = d'.$$

$$2\lambda' + \lambda d = -2n + 2d.$$

• اکنون $d = \deg p - \deg R + 1 = 0$ ، یا $d = -\frac{2\lambda'}{\lambda} = n$. حالت اول را اختیار می کنیم.

• قرار می دهیم $d = 0$. پس، داریم $s(k) = \alpha$. این عبارت را در معادله ی (۵.۳) جایگذاری می کنیم تا از روش ضرایب نامعین مقدار α را تعیین نماییم.

$$1 = (k - n)\alpha_0 - k\alpha_0 = -n\alpha_0.$$

پس، نتیجه می شود که $\alpha_0 = -\frac{1}{n}$. سرانجام، بدست می آوریم

$$G(k) = (-1)^k k \binom{n}{k} \left(-\frac{1}{n}\right) = (-1)^{k+1} \binom{n-1}{k-1}.$$

$$\sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{n}{k} = G(m+1) - G(0) = (-1)^m \binom{n-1}{m}.$$

توجه ۵.۳. با استفاده از سیستم جبر رایانه ای مپیل و بسته ی نرم افزاری ابزارهای مجموع گیری می توانیم به صورت خودکار الگوریتم گاسپر را اجراء کرده و به همان جواب بالا برای $G(k)$ ، به صورت زیر

> with(sumtools) :

[Hypersum; Sumtohyper; extendedgosper; gosper; hyperrecursion;
hypersum; hyperterm; simpcomb; sumrecursion; sumtohyper]

> sumtools[gosper](binomial(n, k) * (-1)^k, k);

$$-\frac{k \binom{n-1}{k-1} (-1)^{k-1}}{n}$$

برسیم. در واقع، خط آخر همان $G(k)$ می باشد.

توجه کنید که برای $m \geq n$ این مجموع برابر صفر است، همان طور که از قضیه ی دو جمله ای نیوتن می دانیم.

مثال ۶.۳. یک فرمول بسته برای مجموع

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 - 1},$$

بدست آورید.
حل. داریم:

$$F(k) = \frac{1}{k^2 - 1}.$$

$$\frac{F(k+1)}{F(k)} = \frac{(k-1)(k+1)}{k(k+2)}.$$

$$p(k) = 1, \quad q(k) = (k-1)(k+1), \quad r(k) = (k-1)(k+1).$$

• $(k+1)|q(k)$ و $(k-1)|r(k)$ ، اما $1 - (-1) = 2$ یک عدد صحیح مثبت است. بنابراین،
با انتخاب جدید

$$q(k) = k-1, \quad r(k) = k+1, \quad p(k) = k$$

قیود (۱.۳) و (۲.۳) ارضاء می شوند.

$$G(k) = \frac{(k+1)^{\frac{1}{(k-1)(k+1)}}}{k} s(k) = \frac{s(k)}{(k-1)(k+1)}.$$

$$Q(k) = q(k) - r(k) = -2, \quad R(k) = q(k) + r(k) = 2k,$$

بنابراین، $\deg(Q) = 0 < 1 = \deg(R)$.

$$2\lambda' + \lambda d = -4 + 2d.$$

• اکنون $1 = d = \deg p - \deg R + 1$ ، یا $d = -\frac{2\lambda'}{\lambda}$. حالت اول را اختیار می کنیم.

• قرار می دهیم $d = 1$. پس، داریم $s(k) = \alpha_1 k + \alpha_0$. این عبارت را در معادله ی (۵.۳) جایگذاری می کنیم تا از روش ضرایب نامعین مقادیر α_0 و α_1 را تعیین نماییم.

$$k = (k-1)(\alpha_1(k+1) + \alpha_0) - (k+1)(\alpha_1 k + \alpha_0) = -\alpha_1 - (\alpha_0 + 2\alpha_0),$$

پس، نتیجه می شود که $\alpha_1 = -1$ و $\alpha_0 = \frac{1}{2}$. سرانجام، بدست می آوریم

$$G(k) = \frac{-(k - \frac{1}{2})}{k(k-1)}$$

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2 - 1} = G(n+1) - G(2) = \frac{3}{4} - \frac{n + \frac{1}{2}}{n(n+1)}.$$

توجه ۷.۳. با استفاده ی مجدد از سیستم جبر رایانه ای میپل و بسته ی نرم افزاری ابزارهای مجموع گیری می توان به صورت خودکار الگوریتم گاسپر را اجراء کرده و به همان جواب بالا برای $G(k)$ ، به صورت زیر برسیم

```
> with(sumtools):
[Hypersum; Sumtohyper; extendedgosper; gosper; hyperrecursion;
hyperterm; hypercomb; sumrecursion; sumtohyper]
> sumtools[gosper]( $\frac{1}{k^2-1}$ );
 $\frac{-(k-\frac{1}{2})}{k(k-1)}$ 
```

مثال ۸.۳. یک فرمول بسته برای مجموع

$$\sum_k k!,$$

بدست آورید.
حل. داریم:

$$F(k) = k!.$$

$$\frac{F(k+1)}{F(k)} = k+1.$$

$$p(k) = 1, \quad q(k) = k+1, \quad r(k) = 1.$$

• $(k+1)|q(k)$ و $1|r(k)$ ، چون $1-1=0$ عدد صحیح مثبت نیست، پس قیود (۱.۳) و (۲.۳) ارضاء می شوند.

$$G(k) = \frac{r(k)F(k)s(k)}{p(k)} = k!s(k).$$

$$Q(k) = q(k) - r(k) = k, \quad R(k) = q(k) + r(k) = k+2,$$

$$\deg(Q) = \deg(R),$$

$$d = \deg p - \deg Q = 0 - 1 = -1$$

• یعنی، چنین عبارات فوق هندسی $G(k)$ وجود ندارد.

توجه ۹.۳. با استفاده ی مجدد از سیستم جبر رایانه ای میپل و بسته ی نرم افزاری ابزارهای مجموع گیری می توان به صورت خودکار الگوریتم گاسپر را اجراء کرده و به همان جواب بالا، یعنی دستور *FAIL* (شکست خوردن الگوریتم)

```
> with(sumtools):
[Hypersum; Sumtohyper; extendedgosper; gosper; hyperrecursion;
hyperterm; simpcomb; sumrecursion; sumtohyper]
> sumtools[gosper](k!);
FAIL
```

برسیم.

برای مطالعه ی بیشتر در زمینه ی الگوریتم گاسپر و تعمیم های آن و همچنین الگوریتم های ویلف - زیلبرگر و دیگر الگوریتم های زیبای محاسبه ی مجموع های نامعین و معین به کتاب بسیار جذاب [۱] مراجعه کنید.

مراجع

- [1] Marko Petkovšek, Herbert S. Wilf, Doron Zeilberger, *A=B*, AK Peters Publishing Company 1996.
- [2] R. W. Gosper, Decision Procedure for Indefinite Hypergeometric Summation, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **75**, 40-42, 1978.