

ارزیابی عملکرد سبد مالی با استفاده از DEA^۱

شکوفه بنی هاشمی^۲

چکیده

در ادبیات مالی، یک ترکیب مناسب از دارایی‌های مالی که توسط سازمان‌ها یا شرکت‌های خصوصی ساخته می‌شود سبد مالی نامیده می‌شود. بهینه سازی و ارزیابی عملکرد سبد مالی علاقه زیادی در میان مشاغل ایجاد کرده است. در میان تعدادی از روش‌های ارزیابی، تحلیل پوششی داده‌ها یکی از بهترین روش‌ها برای ارزیابی کارایی نسبی تعدادی از واحدهای تصمیم‌گیری می‌باشد که چند ورودی را برای تولید چند خروجی به کار می‌برد. در مدل‌هایی که برای ارزیابی عملکرد در چهار چوب میانگین-واریانس و میانگین-واریانس-چولگی که در آن‌ها واریانس به عنوان خروجی و میانگین و چولگی به عنوان ورودی در نظر گرفته می‌شود، کوواریانس مخالف صفر است و همبستگی بین واحدها وجود دارد. همچنین برای محاسبه کارایی با تحلیل پوششی داده‌ها باید واحدها مستقل باشند. در مدل‌های ذکر شده بالا چون از تحلیل پوششی داده‌ها استفاده شده است با توجه به غیر خطی بودن مدل‌ها، بهتر است واحدها مستقل باشند و در نتیجه تعداد محاسبات کاهش می‌یابد. در این مقاله با استفاده از روش تک فاکتور شارپ مدلی برای رفع مشکل بالا و کاهش حجم محاسبات ارائه شده است.

واژگان کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، DEA، ارزیابی عملکرد یا کارایی، سبد مالی

۱. مبحثی تعیین‌کننده در حوزه DEA که در تاریخ شانزدهم اردیبهشت ماه سال ۹۲ در نشست‌های کرسی‌های ترویجی در محل دانشکده اقتصاد دانشگاه علامه طباطبائی در حضور منتقدان محترم جناب آقای دکتر عبدالساده نیسی و سرکار خانم دکتر مهنوش عبدالله میلانی ارائه شد.

۲. عضو هیأت علمی گروه آمار، ریاضی و کامپیوتر دانشکده اقتصاد دانشگاه علامه طباطبائی - shbanihashemi@atu.ac.ir

۱- مقدمه

در سال ۱۹۵۲ تئوری میانگین - واریانس مارکویتز مطرح شد که پایه بسیاری از مدل‌های کنونی می‌باشد. این مدل به دلیل طبیعت واریانس در فرم مربعی می‌باشد. به دلیل مشکلات فرم مربعی، مطالعاتی با (Arditti (1975)، Kane و Ho (1982) و Cheung (1991) نشان دادند که سرمایه‌گذاران چولگی را ترجیح می‌دهند به دلیل اینکه تابع دیگر به فرم مربعی نیست. در مقابل تئوری مارکویتز که دارایی‌های مالی دارای همبستگی بودند و با افزایش تعداد دارایی‌ها، ماتریس کوواریانس بازده دارایی‌ها با ابعاد بزرگی ایجاد می‌شد و بر حجم محاسبات افزوده می‌گشت، روش تک فاکتور شارپ در سال ۱۹۶۴ توسط پرفسور شارپ مطرح شد. این روش موجب کاهش تعداد اطلاعات و حجم محاسبات مورد نیاز برای تصمیم‌گیری گردید. فرض اصلی در این مدل این است که بازده بین دو دارایی مالی، صرفاً به خصوصیات آن دو سهم بستگی ندارد بلکه از طریق ارتباط آن‌ها با بازده بازار به یکدیگر مرتبط خواهند شد. پس ضریب حساسیت به تا ضریبی است که نوسانات نرخ بازده هر سهام را در مقایسه با نوسانات نرخ بازده بازار نشان می‌دهد. با در نظر گرفتن تحقیقات شارپ و دیگران، استفاده از ضریب به تا به عنوان معیار سنجش ریسک غیر قابل کنترل (سیستماتیک) رایج بوده است. همچنین این ضریب می‌تواند به عنوان شاخصی برای رتبه‌بندی دارایی‌های مختلف مورد توجه قرار گیرد. در صورتی که ضریب به تا برای یک دارایی بزرگ‌تر از یک باشد، نوسانات بازدهی آن سهم بیشتر از نوسانات بازده بازار می‌باشد و به آن دارایی با ریسک بالا گفته می‌شود؛ و بر عکس دارایی‌های با ضریب به تا کمتر از یک به مفهوم نوسانات کمتر از نوسانات بازار است و این دارایی‌ها، دارایی با ریسک پایین گفته می‌شوند. در سال ۱۹۹۹ موری و موری مدلی را در چهارچوب میانگین-واریانس بر اساس تحلیل پوششی داده‌ها، با میانگین بازده به عنوان خروجی و انحراف معیار بازده (ریسک) به عنوان ورودی، برای محاسبه دارایی‌های کارا و ناکارا به کار بردند. کار آن‌ها را (Joro & Na (2005) در چهارچوب میانگین-واریانس-چولگی ادامه دادند و چولگی بازده را نیز به عنوان خروجی در نظر گرفتند. تفاوت مدل میانگین-واریانس مارکویتز با مدل‌های بالا در این است که در مدل مارکویتز تمام ترکیبات کارا با استفاده از مدل و به ازاء یک سطح از بازده و با در نظر گرفتن محورهای افقی و عمودی به ترتیب به عنوان انحراف معیار بازده و میانگین بازده روی یک منحنی

مشخص می‌شود اما در مدل‌های مطرح شده به جای محاسبه تمام مرز کارایی فقط نقاط تصویر دارایی‌ها محاسبه می‌شوند. در این مدل‌ها از چهارچوبی مشابه DEA غیر خطی که ساختار همبستگی بین واحدها وجود دارد استفاده شده است. در صورتی که می‌دانیم در تحلیل پوششی داده‌ها واحدها از هم مستقل می‌باشند و همچنین مدل‌های بالا مستلزم اطلاعات کافی و مطمئن از بازده، انحراف معیار بازده و کوواریانس بین بازده هر زوج از دارایی‌ها است. پس بهتر است از روش تک فاکتور مطرح شده توسط پرفسور شارپ استفاده شود. در این مقاله مدل میانگین-واریانس جدیدی با استفاده از روش تک فاکتور شارپ مطرح می‌شود و موجب کاهش چشمگیر حجم محاسبات می‌گردد.

این مقاله شامل بخش‌های زیر است. بخش بعدی مختصری درباره تحلیل پوششی داده‌ها و مدل‌های میانگین-واریانس مارکویتز و موری و مدل میانگین-واریانس-چولگی جور و نا می‌باشد. در بخش ۳ مدل جدید میانگین-واریانس مطرح می‌شود. در بخش ۴ مدل مطرح شده جدید با یک مثال واقعی از سهام ۱۷ شرکت بازگو می‌شود و نهایتاً در بخش ۵ نتیجه گیری انجام می‌گیرد.

۲- سابقه‌ای از محاسبه کارایی

۲-۱. مختصری درباره تحلیل پوششی داده‌ها

مسئله ارزیابی عملکرد واحدها از دیرباز مورد توجه مدیران بوده است. برخورد علمی با این مطلب از اواخر جنگ جهانی دوم شروع شده و گسترش چشمگیری داشته است. برای ارزیابی واحدها، رابطه عملکرد را با عوامل تأثیرگذار تابعی به صورت $y = f(u, v)$ در نظر می‌گیریم که در آن بردار ورودی (u, v) خروجی y را تولید می‌نماید. بردار ورودی از دو قسمت عوامل قابل کنترل و عوامل غیر قابل کنترل تشکیل شده است. وقتی از یک ترکیب از ورودی‌ها ماکزیمم خروجی عاید گردد یعنی y ماکزیمم خروجی باشد که از به کار بردن بردار ورودی (u, v) عاید می‌گردد در این صورت f تابع تولید می‌باشد. به طور مثال فرض کنید تابع تولید برای دو ورودی و یک خروجی به صورت $y = x_1^2 + x_2^2$ باشد و برای ترکیبی از ورودی‌های (۳ و ۲)، ۱۰ واحد خروجی داشته باشیم واضح است که این واحد خوب عمل ننموده است زیرا $y = 2^2 + 3^2 = 13$. پس با در دست داشتن تابع تولید به راحتی می‌توان از چگونگی

عملکرد واحد اطلاع حاصل نمود. در اغلب موارد تابع تولید در دست نمی‌باشد. یعنی در اغلب موارد یک ترکیب از ورودی‌ها مانند $(x_1^0, \dots, x_m^0)$ یک بردار خروجی مانند $(y_1^0, \dots, y_s^0)$ تولید می‌نماید. از این رو ناچاریم تقریبی از تابع تولید را در دست داشته باشیم. تقریب تابع تولید به دو صورت امکان پذیر است:

۱- روش‌های پارامتری

۲- روش‌های غیر پارامتری

در روش پارامتری شکل خاصی از یک تابع را برای تخمین تابع تولید در نظر می‌گیرند و با استفاده از روش‌های ریاضی (به رازش منحنی) پارامترهای تابع را مشخص می‌کنند. در روش‌های مطرح شده اشکالاتی از قبیل: چندین ورودی فقط یک خروجی را تولید می‌نماید و منحنی به رازش داده شده تمایل مرکزی دارد و outlier که ممتازان جامعه هستند، نقش زیادی در مشخص نمودن پارامترها ندارند، به چشم می‌خورد؛ بنابراین برای رفع این مشکلات در سال ۱۹۵۷ فارل روش غیر پارامتری را ارائه نمود. فارل با استفاده از مشاهدات و اصول انکار ناپذیر حاکم بر علم مورد نظر، مجموعه‌ای به نام مجموعه امکان تولید (production possibility set (pps)) ساخت و مرز آن را تابع تولید نامید. واحد تصمیم گیرنده‌ای که روی مرز این مجموعه قرار گیرد، کارا است و در غیر این صورت ناکارا تلقی می‌شود. مقاله فارل مورد توجه پروفیسور کوپر و همکاران قرار گرفت و آن‌ها در سال ۱۹۷۸ تحلیل اولیه فارل را که در حالت تک خروجی - چند ورودی بود به حالت چند ورودی - چند خروجی تعمیم دادند؛ بنابراین کاربرد تعمیم کار فارل به عنوان تحلیل پوششی داده‌ها و تحت عنوان مقاله CCR در ارزیابی یک موسسه آموزشی به چاپ رسید. این مقاله پایه تمام مطالعات بعدی در تحلیل پوششی داده‌ها گردید.

در این قسمت برخی از تعاریف پایه‌ای تحلیل پوششی داده‌ها ارائه شده است.

(ورودی) هر آن چیزی که کم شدن آن موجب بهبود کارایی گردد.

(خروجی) هر آن چیزی که افزایش آن موجب بهبود کارایی گردد.

(واحد تصمیم گیرنده - DMU) منظور از یک واحد تصمیم گیرنده، عبارت است از واحدی که با دریافت بردار ورودی مانند $(x_1, \dots, x_m)$ بردار خروجی مانند $(y_1, \dots, y_s)$ را تولید نماید و منظور از واحدهای تصمیم گیرنده متجانس عبارت است

از واحدهایی که عمل مشابه دارند و با دریافت ورودی‌های مشابه خروجی‌های مشابه تولید می‌نمایند. مثلاً شعبات یک بانک واحدهای متجانس می‌باشند که با دریافت امکاناتی مانند پرسنل، فضای اداری، کامپیوتر،... به جمع آوری سپرده، حصول سود و عرضه خدمات می‌پردازند.

(کارایی) کارایی به معنی خوب کار کردن، یک تابعی از شاخص‌های درون سازمانی است. در DEA، هدف کار کردن با کارایی یعنی شاخص‌های درون سازمانی است. کارایی به دو بخش تقسیم می‌شود:

۱- کارایی مطلق (سنجیدن با استاندارد)

۲- کارایی نسبی (سنجیدن با یکدیگر)

از آنجا که تعریف استانداردها و رسیدن به آن مشکل است لذا از کارایی نسبی استفاده می‌شود.

کارایی را به صورت تابعی از ورودی و خروجی نیز تعریف می‌کنیم یعنی

$$E = \frac{\text{Output}}{\text{input}}$$

حال اگر ورودی و خروجی ما بیشتر از یک باشد یعنی فرض کنیم یک واحد تصمیم گیرنده دارای m ورودی و s خروجی باشد به هر یک از ورودی‌ها و خروجی‌ها وزنی را نسبت داده و خارج قسمت مجموع وزن دار شده‌ی خروجی‌ها را به مجموع وزن دار شده‌ی ورودی‌ها تقسیم می‌کنیم.

$$\text{کارایی مطلق واحد تصمیم گیرنده } \lambda = \frac{u_1 y_{1j} + u_2 y_{2j} + \dots + u_s y_{sj}}{v_1 x_{1j} + v_2 x_{2j} + \dots + v_m x_{mj}}$$

اگر $m=s=1$ باشد کارایی نسبی واحد تصمیم گیرنده $0-\lambda$ به صورت زیر می‌باشد:

و اگر $m \geq 2, s \geq 2$ باشد در این صورت کارایی نسبی واحد $0-\lambda$ با استفاده از ورودی و خروجی مجازی به صورت زیر است.

(ورودی و خروجی مجازی): فرض کنید n DMU با بردارهای ورودی $X_j = (x_{1j}, \dots, x_{mj})$ و بردارهای خروجی $Y_j = (y_{1j}, \dots, y_{sj})$ موجود است و $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ برداری نامنفی باشد در این صورت ورودی و خروجی مجازی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{ورودی مجازی} = \lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_n X_n$$

$$\text{خروجی مجازی} = \lambda_1 Y_1 + \dots + \lambda_n Y_n$$

یک DMU مجازی واحدی است که ورودی یا خروجی آن مجازی باشد. DMU_K با بردار ورودی X_K و بردار خروجی Y_K بر DMU_h با بردار ورودی X_h و بردار خروجی Y_h غالب است. اگر و فقط اگر $(-X_h, Y_h)^t \geq (-X_K, Y_K)^t$ و نامساوی اقلأ در یک مؤلفه به صورت اکید برقرار باشد. علامت t به مفهوم ترانواده می‌باشد.

مجموعه امکان تولید را به صورت زیر تعریف می‌کنند:

$$T = \{(X, Y) : X \text{ نامنفی بتواند } Y \text{ نامنفی را تولید کند}\}$$

ملاحظه می‌گردد که مجموعه امکان تولید T زمانی مشخص می‌شود که تابع تولید شناخته شده باشد. در حالت کلی تابع تولید در دسترس نیست؛ لذا اصول زیر را جهت تعریف مجموعه امکان تولید T می‌پذیریم:

اصل اول: شمول مشاهدات: تمام مشاهدات در T قرار دارند.

$$(X_j, Y_j) \in T \quad j = 1, 2, 3, \dots, n$$

اصل دوم: بیکرانی اشعه (بازده به مقیاس ثابت): این اصل می‌گوید که اگر $(X, Y) \in T$ باشد آنگاه اگر به ازاء $\lambda > 0$ $(\lambda X, \lambda Y) \in T$ می‌باشد.

اصل سوم: تحدب:

T مجموعه‌ای محدب و بسته است یعنی اگر $(X, Y) \in T$ و $(X', Y') \in T$ آنگاه

$$(\lambda(X, Y) + (1 - \lambda)(X', Y')) \in T$$

اصل چهارم: امکان پذیری:

این اصل می‌گوید که اگر $(X, Y) \in T$ و $X' \geq X$ و $Y' \leq Y$ در این صورت

$(X', Y') \in T$ می باشد.

اصل پنجم :

کمینه برون یابی : طبق این اصل، T کوچک ترین مجموعه ای است که در اصول بالا صدق می کند.

اصول فوق الذکر مجموعه منحصر به فرد T_c را به صورت زیر مشخص می نماید :

$$T_c = \{(X, Y) \mid X \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j X_j, Y \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j Y_j, \lambda_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n\}$$

با قبول اصل بازده به مقیاس ثابت، مجموعه فوق را با T_c نشان می دهیم که به مجموعه امکان تولید CCR معروف است.

حال DMU_n را در نظر می گیریم که هر کدام دارای m ورودی و s خروجی می باشند و هیچ یک از بردارهای ورودی و خروجی صفر نمی باشند. فرض کنیم DMU_0 واحد تحت ارزیابی باشد و فرض کنیم $o \in \{1, \dots, n\}$ باشد DMU_o را کارای نسبی گویند اگر و فقط اگر هیچ DMU مجازی یا حقیقی یافت نشود که غالب بر DMU_o باشد.

حال به مجموعه ای امکان تولید بازمی گردیم. در مجموعه امکان تولید، مرز آن، که یک سطح قطعه ای خطی است مرز کارا نام دارد.

هر DMU که روی مرز قرار داشته باشد کارای نسبی است و در غیر این صورت ناکارا می باشد.

حال با دانستن مجموعه ای امکان تولید می خواهیم بدانیم که DMU_o روی مرز قرار دارد یا خیر؟

اگر DMU مورد نظر روی مرز قرار نداشته باشد به روش های مختلف می توان آن را به سوی مرز سوق داد :

۱- کاهش ورودی ها

۲- افزایش خروجی ها

در حالت اول سعی در پیدا کردن واحد مجازی داریم که با همان خروجی حداقل ورودی ممکن را تولید نماید.

بنابراین هدف حل مسئله زیر است :

اما شرط عضویت در T_C با توجه به اصل امکان پذیری آن است که

$$\begin{aligned} & \theta X_o \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j X_j, \quad Y_o \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j Y_j \\ & \text{Min } \theta \\ & \text{S.t } \sum_{j=1}^n \lambda_j X_j \leq \theta X_o \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j Y_j \geq Y_o \\ & \lambda_j \geq 0 \quad j=1, \dots, n \end{aligned}$$

که (۱-۲) یک مسأله برنامه ریزی خطی با مجهولات $\theta, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ است. این مسأله که با کاهش ورودی همراه است معروف به مدل پوششی CCR با ماهیت ورودی است.

با معرفی متغیرهای کمکی s_1, s_2 و ε (عدد غیر ارشمیدسی) مدل به صورت زیر باز نویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} & \text{Min } \theta - \varepsilon \left(\sum_{i=1}^m s_i^- + \sum_{r=1}^s s_r^+ \right) \\ & \text{S.t } \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} + s_i^- = \theta x_{io} \quad i=1, \dots, m, \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{ro} \quad r=1, \dots, s, \\ & \lambda_j \geq 0 \quad j=1, \dots, n, \\ & s_i^- \geq 0 \\ & s_r^+ \geq 0 \end{aligned}$$

که این مدل به مدل CCR_ε معروف است. مشکل این مدل انتخاب ε می‌باشد اگر در جواب بهین مدل (۱-۲) $\theta^* < 1$ باشد یعنی DMU_o روی مرز قرار ندارد و ناکارا می‌باشد.

در حالت دوم، افزایش خروجی به معنی انبساط خروجی از Y_o به ϕY_o می‌باشد به

طوری که نقطه $(X_o, \phi Y_o)$ روی مرز قرار گیرد یعنی حل مسأله زیر :

که با توجه به ساختار T_C مسئله به صورت زیر می‌شود :

Max ϕ

$$\text{S.t } \sum_{j=1}^n \lambda_j X_j \leq X_o$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j Y_j \geq \phi Y_o$$

$$\lambda_j \geq 0$$

$$j = 1, 2, \dots, n$$

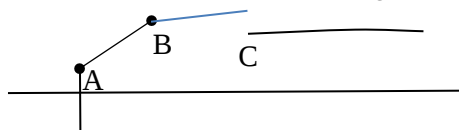
که این مسأله بیان حالتی است که با افزایش خروجی یک DMU غالب بر نقطه (X_o, Y_o) به صورت $(X_o, \phi Y_o)$ ، پیدا کرده‌ایم که روی مرز کارایی قرار دارد. که چون $\phi Y_o > Y_o$ است پس $\phi \geq 1$ است.

مدل BCC: مدل BCC به دلایل عمده که به دو مورد آن در زیر اشاره شده است، در سال ۱۹۸۴ توسط بنکر و چارنز و کوپر ارائه گردید.

۱- مرز تابع تولید تجربی به مرز BCC نزدیکتر می‌باشد.

۲- در مدل CCR تعداد DMUهای کارا بسیار کم بود که این اشکال با توجه به مدل BCC تا حدی برطرف گردید.

نقطه C که در مدل CCR ناکارا است در اینجا کارایی ضعیف دارد.



مجموعه‌ای امکان تولید این مدل که با حذف اصل بیکرانی اشعه، از مجموعه‌ای اصول موضوع به P_{CCR} دست می‌آید و به T_v معروف است به صورت زیر است :

$$T_v = \left\{ (X, Y) \left| X \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j X_j, Y \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j Y_j, \sum \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0, j = 1, \dots, n \right. \right\}$$

فرم پوششی مدل BCC در ماهیت ورودی برای ارزیابی DMU_o به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \theta_0^{BCC*} &= \text{Min} \quad \theta_0^{BCC} \\ \text{S.t} \quad &\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq \theta_0^{BCC} x_{io} \quad i = 1, \dots, m \\ &\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{ro} \quad r = 1, \dots, s \\ &\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \\ &\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

اگر در مدل BCC به جای متغیر $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$ ، $\sum_{j=1}^n \lambda_j > 1$ و یا $\sum_{j=1}^n \lambda_j < 1$ قرار گیرد مدل به صورت CCR-BCC و BCC-CCR می‌باشد.

۳- مدل‌هایی برای محاسبه کارایی

بازده یک دارایی مالی شامل وجوه دریافتی در طول نگهداری آن دارایی به علاوه مابه‌التفاوت قیمت خرید و فروش آن می‌باشد. در صورتی که قیمت فروش و مقدار وجوه دریافتی به طور قطع از قبل معلوم باشند نرخ بازده سرمایه گذاری با قطعیت معلوم است. ولی اغلب چنین نیست و لذا نوعی عدم اطمینان در نرخ بازگشت سرمایه وجود دارد که به صورت انحراف معیار بازده بیان می‌گردد. با تعبیری مشابه بازده و ریسک دارایی مالی، بازده و ریسک سبد دارایی‌های مالی را می‌توان تعریف نمود. بازده یک سبد دارایی مالی عبارت است از بازده حاصل از نگهداری سبد مذکور در یک دوره مالی و ریسک متناظر با یک سبد دارایی مالی، معادل انحراف معیار بازده سبد مذکور تعریف می‌شود. در مدل میانگین-واریانس مارکویتز، فرض کنید N سهم داریم که بازده و انحراف معیار بازده و ضریب همبستگی بین هر دو زوج از این N سهم محاسبه و معلوم می‌باشند. میانگین بازده سبد متشکل از این سهام برابر است با:

$$E(r_p) = \sum_{i=1}^N \lambda_i E(r_i) \quad \text{که در آن } r_j \text{ متغیر تصادفی بازده دارایی } j \text{ ام به طوری که}$$

$$r_j \in \text{Normal}(\mu_j, \delta_j^2) \quad \text{و واریانس بازده سبد متشکل از این سهام برابر است با:}$$

$$\sigma_{r_p}^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \lambda_i \lambda_j \rho_{r_i r_j} \delta_i \delta_j = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \lambda_i \lambda_j \sigma_{ij} \quad \text{در آن } \sigma_{ij} \text{ کوواریانس بین } r_i, r_j$$

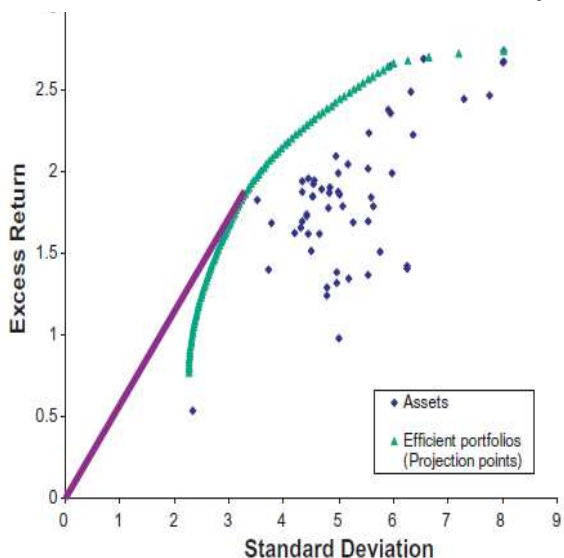
است و باید داشته باشیم $\sum_{i=1}^N \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0$. برای پیدا کردن ترکیبات کارا، باید به ازاء سطوح مختلف از بازده، ترکیبی از سهام که انحراف معیار (یا واریانس) سبد سهام را حداقل می‌کند، مشخص گردد. پس در مدل میانگین - واریانس مارکوویتز، مدل زیر به ازاء سطوح مختلف از بازده حل می‌شود:

$$\min \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \lambda_i \lambda_j \rho_{r_i r_j} \delta_i \delta_j$$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i E(r_i) \geq ?$$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0$$

مدل بالا یک مدل غیر خطی و در فرم مربعی است. با حل این مدل یک نقطه از ترکیبات کارا به ازاء یک سطح از بازده (عدد قرار داده شده به جای علامت سوال) مشخص می‌گردد و برای یافتن نقاط کارای دیگر، باید با تغییر سطح بازده مجدداً مدل را حل نمود. با تکرار این روند تمام ترکیبات کارا به دست می‌آیند و منحنی آن مشخص می‌شود.

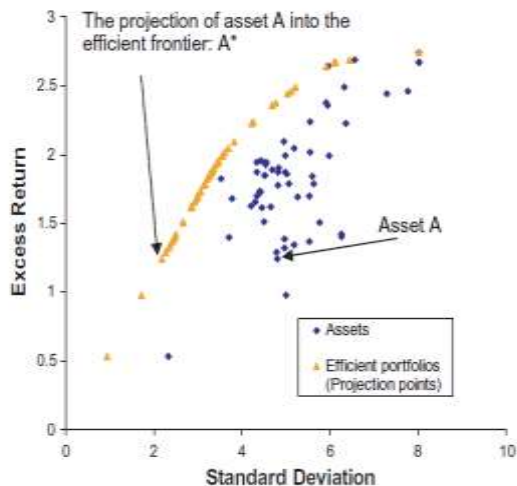


همچنین λ_i وزن دارایی مالی i ام به ازاء سطح بازده مربوطه است. در مدل‌های مطرح

شده با موری و جوړو و نا به جای محاسبه تمام مرز کارایی فقط نقاط تصویر دارایی‌ها محاسبه می‌شوند. فاصله بین دارایی مالی و تصویرش یعنی نسبت بین واریانس نقطه تصویر و واریانس دارایی به عنوان اندازه کارایی (θ) در نظر گرفته می‌شود. در این چهارچوب N دارایی مالی وجود دارد، λ_j وزن دارایی j ام در نقطه تصویر است. μ_0 و δ_0^2 به ترتیب میانگین بازده واحد تحت ارزیابی و واریانس بازده واحد تحت ارزیابی می‌باشند. مدل زیر که الهام گرفته از تحلیل پوششی داده‌ها می‌باشد، با میانگین بازده به عنوان خروجی و انحراف معیار بازده (ریسک) به عنوان ورودی، برای محاسبه دارایی‌های کارا و ناکارا به کار می‌روند و θ نمره کارایی واحد تحت ارزیابی است و به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} \min \quad & \theta - \varepsilon(s_1 + s_2) \\ \text{s.t.} \quad & E\left[\sum_{j=1}^n \lambda_j r_j\right] - s_1 = \mu_0, \\ & E\left[\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j (r_j - \mu_j)\right)^2\right] + s_2 = \theta \delta_0^2 \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j \leq 1 \quad \forall \lambda \geq 0 \end{aligned} \quad (1)$$

θ در بازه $[0,1]$ به دست می‌آید. دارایی مالی با θ مساوی ۱ و متغیرهای کمکی s_1, s_2 مساوی با صفر، کارا گفته می‌شود. در غیر این صورت دارایی مالی ناکارا است.



Joro&Na (2005) رویکرد توصیف شده در (2) را در چهارچوب میانگین-واریانس-چولگی بسط دادند و κ_o را به عنوان چولگی واحد تحت ارزیابی معرفی کردند و چولگی بازده را نیز به عنوان خروجی در نظر گرفتند. نمره کارایی θ با حل مدل زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \min \quad & \theta - \varepsilon(s_1 + s_2 + s_3) \\ \text{s.t.} \quad & E\left[\sum_{j=1}^n \lambda_j r_j\right] - s_1 = \mu_o, \\ & E\left[\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j (r_j - \mu_j)\right)^2\right] + s_2 = \theta \delta_o^2 \\ & E\left[\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j (r_j - \mu_j)\right)^3\right] - s_3 = \kappa_o \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j \leq 1 \quad \forall \lambda \geq 0 \end{aligned} \quad (2)$$

θ در بازه $[0,1]$ به دست می‌آید. دارایی مالی با θ مساوی ۱ و متغیرهای کمکی s_1, s_2, s_3 مساوی با صفر کارا گفته می‌شود. در غیر این صورت دارایی مالی ناکارا است. در مدل‌های بالا که الهام گرفته شده از تحلیل پوششی داده‌ها می‌باشد همبستگی بین هر زوج دارایی مالی وجود دارد و ماتریس کوواریانس آن برای تعدادی نه چندان بزرگ از دارایی‌های مالی دارای ابعادی بزرگ است و حجم محاسبات بسیار زیاد می‌باشد. در قسمت بعد مدلی برای رفع مشکلات بالا ارائه می‌شود.

۴- مدل پیشنهادی میانگین - واریانس برای محاسبه کارایی در سبد مالی

کارایی سبد مالی به دو روش زیر قابل محاسبه است. روش اول: از مدل ماهیت ورودی CCR- BCC با انحراف معیار بازده به عنوان ورودی و میانگین بازده به عنوان خروجی استفاده می‌شود که آن را MV-DEA می‌نامیم. روش دوم: با توجه به مشکلات مطرح شده در مدل‌های ۱ و ۲ مدل زیر با استفاده از روش تک فاکتور شارپ بیان شده است. در مدل ۱ با توجه به رابطه (2) داریم:

$$E \left[\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j (r_j - \mu_j) \right)^2 \right] = \sum_{j=1}^n \lambda_j^2 E (r_j - \mu_j)^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \lambda_j \lambda_i E (r_j - \mu_j)(r_i - \mu_i) = \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j^2 \sigma^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \lambda_j \lambda_i \text{cov}(r_i, r_j)$$

با توجه به رابطه بالا واحدها مستقل از هم نمی‌باشند در حالی که در تحلیل پوششی داده‌ها واحدها مستقل از هم عمل می‌کنند. همچنین در مدل ۱ برای N دارایی مالی، شاجزای اطلاعاتی مورد نیاز عبارتند از N بازده، N انحراف معیار و $\frac{N^2 - N}{2}$ کوواریانس بین بازده دارایی‌ها و لذا در مجموع $\frac{N(N+3)}{2}$ جزء اطلاعاتی مورد نیاز می‌باشد. در صورتی که با روش شارپ تعداد کوواریانس مورد نیاز از $\frac{N^2 - N}{2}$ به N تقلیل میابد. یعنی برای N سهم تعداد اجزاء اطلاعاتی مورد نیاز در این روش عبارتند از: N بازده، N انحراف معیار و N کوواریانس بین سهام و ایندکس که تعداد آن به $3N+2$ تقلیل می‌یابد. همچنان که دیده می‌شود این حجم اطلاعات در مقابل $\frac{N(N+3)}{2}$ بسیار کمتر بوده و محاسبات مورد نیاز را کاهش می‌دهد و همبستگی بین بازده دارایی‌ها وجود ندارد. پس در مدل اصلاح شده میانگین-واریانس علاوه بر مستقل بودن واحدها حجم محاسبات نیز به طور چشمگیری کم شده است. مدل به صورت زیر می‌باشد:

$$\min \theta - \varepsilon(s_1 + s_2)$$

$$s.t. \quad \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j A_j - s_1 = R_o \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j^2 Q_j + s_2 = \theta \delta_o^2 \quad (2) \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j B_j = \lambda_{n+1}$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \leq 1 \quad \lambda_j \geq 0$$

در این مدل R_i بازده دارایی مالی i ام، A_i, B_i اعداد ثابت و معرف خط رگرسیون بین

R_i و I هستند. داریم: $R_i = A_i + B_i I + C_i$ که در آن C_i یک متغیر تصادفی با میانگین صفر و واریانس Q_i می‌باشد. I نیز یک متغیر تصادفی و معرف سطح ایندکس است. این ایندکس می‌تواند سطح عمومی بازده بازار سهام، میزان تولید ناخالص داخلی، شاخص قیمت و یا هر عامل مهم تأثیر گذار دیگر در بازده دارایی‌های مالی باشد. مقدار I در آینده، یک متغیر تصادفی به صورت $I = A_{n+1} + C_{n+1}$ تعریف می‌شود. A_{n+1} عدد ثابت و C_{n+1} یک متغیر تصادفی با میانگین صفر و واریانس Q_{n+1} می‌باشد. فرض بر این است که کوواریانس بین C_i, C_j برای هر مقدار از $i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, N, i \neq j$ صفر است. A_i و B_i معرف خط رگرسیون بین I و R_i هستند. مقدار I در آینده نیز دارای میانگین A_{n+1} و واریانس Q_{n+1} است. اطلاعات مورد نیاز برای این مدل عبارت است از: مقادیر A_i, B_i, Q_i مربوط به دارایی‌های مالی که با توجه به اطلاعات گذشته برآورد می‌گردد و همچنین مقدار A_{n+1}, Q_{n+1} مربوط به ایندکس که باید تخمین زده شود. این مدل پس از انجام محاسبات به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\min \theta - \varepsilon(s_1 + s_2)$$

$$s.t \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j R_j - s_1 = R_o$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j^2 \delta_j^2 + (2 \sum_{j \neq k} \lambda_j \lambda_k B_j B_k * Q_{n+1}) + s_2 = \theta \delta_o^2$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \leq 1 \quad \lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n$$

و محاسبات به صورت زیر می‌باشد:

$$(1) \quad \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \dots + \lambda_n A_n + \lambda_{n+1} A_{n+1} \geq R_o$$

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \dots + \lambda_n A_n + (\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 + \dots + \lambda_n B_n) A_{n+1} \geq R_o$$

$$\lambda_1 (A_1 + B_1 A_{n+1}) + \dots + \lambda_n (A_n + B_n A_{n+1}) \geq R_o$$

$$\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2 + \dots + \lambda_n R_n \geq R_o$$

$$(2) \quad \lambda_1^2 Q_1 + \dots + (\lambda_{n+1}^2) Q_{n+1} \leq \theta \delta_o^2$$

$$\lambda_1^2 Q_1 + \dots + (\lambda_1 B_1 + \dots + \lambda_n B_n)^2 Q_{n+1} \leq \theta \delta_o^2$$

$$\lambda_1^2 Q_1 + \dots + (\lambda_1^2 B_1^2 + \dots + \lambda_n^2 B_n^2 + 2 \sum_{j \neq k} \lambda_j \lambda_k B_j B_k * Q_{n+1}) \leq \theta \delta_o^2$$

۴-۱. مثال کاربردی

فرض کنید برای ۱۷ نوع سهم با توجه به اطلاعات گذشته آن‌ها، رگرسیون خطی انجام و مقادیر $A_i, B_i, Q_i, E(R_i), \delta_{R_i}^2$ محاسبه و در جدول زیر آمده است:

	A_i	B_i	$E(R_i)$	Q_i	δ^2
1	0.17	0.93	10.4	45.15	67.96
2	- 0.59	1.26	13.3	29.48	71.41
3	1.27	1.50	17.8	150.30	209.63
4	- 0.28	1.17	12.6	45.42	81.55
5	1.02	10.05	12.5	114.66	143.07
6	0.85	1.36	15.8	43.29	92.07
7	2.48	1.37	17.5	132.25	181.83
8	0.47	0.86	9.90	82.08	101.59
9	1.55	1.07	13.30	66.56	96.64
10	- 0.16	0.97	10.5	86.40	111.28
11	2.52	1.17	15.4	51.98	88.11
12	0.76	0.87	10.3	59.28	79.32
13	- 0.28	0.91	9.70	22.27	44.16
14	1.47	1.73	20.5	166.28	275.13
15	1.63	1.09	13.6	94.09	125.47
16	0.064	0.98	11.4	48.86	74.18
17	0.28	0.87	9.80	17.64	37.68

در جدول زیر کارایی محاسبه شده با مدل MV-DEA و مدل میانگین- واریانس اصلاح شده وجود دارد.

	MV DEA	MV efficiency Measure
1	0.63395	0.48956
2	0.96903	0.65416
3	0.81080	0.46610
4	0.77124	0.55239
5	0.43332	0.33749
6	1/00	0.67032
7	0.87050	0.49794
8	0.37977	0.31192
9	0.71605	0.52193
10	0.39525	0.31694
11	1.00	0.68103
12	0.53180	0.41972
13	0.84455	0.64220
14	1.00	1.00
15	0.57305	0.43422
16	0.70219	0.51985
17	1.00	0.73925

۵- نتیجه گیری

Joro&Na مدل‌هایی را برای ارزیابی کارایی معرفی کردند که از تحلیل پوششی داده‌ها استفاده شده بود در تحلیل پوششی داده‌ها واحدها مستقل از هم می‌باشند پس در مدل اصلاح شده میانگین - واریانس بازده دارایی‌ها مستقل از هم هستند و فقط هر کدام با بازده بازار ارتباط دارند و حجم محاسبات به طور چشمگیری کم شده است. در مثال عددی نیز دیده می‌شود که این مدل در مقایسه با MV-DEA به طور دقیق‌تری در همه واحدها عمل کرده است و مقدار کارایی با دقت بیشتری محاسبه شده است.

- Applications. Kluwer Academic Publishers, Boston.
- Arditti, F.D., 1975. Skewness and investors' decisions: A reply. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 10, 173–176.
- Charnes, A., Cooper, W.W., Lewin, A.Y., Seiford, L.M. (Eds.), 1994. *Data Envelopment Analysis: Theory, Methodology and*
- Charnes, A., Cooper, W.W., Rhodes, E., 1978. Measuring Efficiency of Decision Making Units. *European Journal of Operational Research* 2, 429–444.
- Fischer, D.E., Jordan, R.J., 1991. "Security Analysis and Portfolio Management". Fifth Edition, Prentice Hall.
- Ho, Y- K, Cheung, Y.- L., 1991. Behavior of intra- daily stock return on an Asian emerging market—Hong Kong. *Applied Economics* 23, 957–966.
- Joro, T., Na, P., 2005. Portfolio performance evaluation in a mean- variance- skewness framework. *European Journal of Operational Research* 175, 446–461.
- Kane, A., 1982. Skewness preference and portfolio choice. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 17, 15–25.
- Markowitz, H.M., 1952. Portfolio selection. *Journal of Finance* 7, 77–91.
- Morey, M.R., Morey, R.C., 1999. Mutual fund performance appraisals: A multi- horizon perspective with endogenous benchmarking. *Omega* 27, 241–258.
- Sharpe, W.F., 1964. Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. *Journal of Finance* 19, 425–442.
- Sharpe, W.F., 1985. "Investment", Third Edition, Prentice- Hall.