

هندسه نرخ‌های بهره^۱

محمد جلوداری ممقانی^۲

چکیده

در این مقاله مدل‌های تصادفی قیمت‌های اوراق قرضه را معرفی می‌کنیم. این مدل‌ها رابطه‌ی نزدیکی با ساختار زمانی نرخ‌های بهره و قیمت بازاری ریسک دارند. ثابت می‌کنیم که در بازار بدون آربیتراژ مدل قیمت به وسیله‌ی مدل نرخ بهره‌ی آنی آنی تعیین می‌شود. سرانجام چارچوب هیث - جرو - مورتون را که مبتنی بر نرخ بهره‌ی پیشرو آنی است معرفی می‌کنیم و قیمت بازاری ریسک را در این چارچوب به دست می‌آوریم.

واژگان کلیدی: نرخ بهره پیشرو آنی^۳، نرخ بهره آنی آنی^۴، منحنی ثمر^۵، ساختار زمانی نرخ بهره^۶، منیفلد پایدار^۷، قیمت بازاری ریسک^۸.

۱. مبحثی تعیین کننده در حوزه ماهیت نرخ بهره که در تاریخ نهم اردیبهشت ماه سال ۹۲ در نشست‌های کرسی‌های ترویجی در محل دانشکده اقتصاد دانشگاه علامه طباطبائی در حضور منتقدان محترم جناب آقای دکتر مسعود درخشان و جناب آقای دکتر عبدالرحیم بادامچی زاده ارائه شد.

۲. عضو هیأت علمی گروه آمار، ریاضی و کامپیوتر دانشکده اقتصاد دانشگاه علامه طباطبائی - j_mamaghani@atu.ac.ir

3. Instantaneous forward interest rate

4. Instantaneous short interest rate

5. Yield curve

6. Term structure of interest rates

7. Stable manifold

8. Market Price of risk

۱- مقدمه

مدل سازی پدیده‌های بازارهای مالی با استفاده از دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل تصادفی، فرصت بی‌همتایی است که با استفاده از آن می‌توان وجوه اشتراک شاخه‌های مختلف علم اقتصاد و علوم ریاضی را به خوبی تماشا کرد. یکی از نتایج این کار یافتن نمونه‌های بی نظیری از این مدل‌هاست که در ریاضیات نیز جایگاه ویژه‌ای دارند. مطالعه‌ی چند وجهی این مدل‌هاست که توان ما را در تحلیل پدیده‌های اقتصادی و ریاضی وسعت می‌بخشد و الهام بخش دست اندر کاران برای پیدا کردن مدل‌هایی با کارایی بیشتر و ویژگی‌های عمیق‌تر، در هر دو بعد اقتصادی و ریاضی، می‌شود.

الف. رفتار قیمت ورقه‌ی قرضه در رابطه با نرخ بهره آنی آتی. ابتدا مدلی برای این نرخ انتخاب می‌کنیم و سپس با استفاده از داده‌های بازار منحنی تقریبی ثمر (yield) را با به کاربردن نرم افزارهای موجود به دست آوریم.

سوال این است که آیا این منحنی و تکرارهای آن با مدل انتخاب شده سازگار است؟
ب. رفتار لبخند تلاطم با استفاده از مدل‌های تلاطم تصادفی قیمت اختیار. این مدل‌ها بسیار متنوع‌اند و یکی از معروف‌ترین آن‌ها مدل تصادفی آلفا، به تا رو (Stochastic alpha, beta, rho model) هاگان و دیگران است. این مدل‌ها با هسته‌ی گرما، رویه‌های ریمن و به ویژه هندسه‌ی هذلولوی رابطه‌ی نزدیکی دارند. مثلاً هندسه‌ی متناظر با مدل تصادفی هاگان، هندسه‌ی هذلولوی دو بعدی است و لذا انحنای آن عدد ثابت ۱- است.

سوال این است که آیا انحنای فضا تأثیری در لبخند تلاطم دارد؟
پ. وجود چگالی هموار برای جواب قوی معادلات دیفرانسیل تصادفی. مدل بلک-شولز برای قیمت سهام و تابع چگالی فرایند قیمت سهام مثالی معمولی در این خصوص است.

سوال این است که تحت چه شرایطی چگالی جواب قوی تابعی هموار است؟
در این جاست که میدان‌های برداری، قضیه هرمندرو عملگرهای زیر بیضوی وارد می‌شوند. البته هرمندر این مسأله را با روش‌های ریاضی در ۱۹۶۷ حل کرده است، ولی حل آن با استفاده از مفهوم مشتق متغیرهای تصادفی (مشتق مالی‌وین) موجب شد درهای جدیدی بروی پژوهشگران علوم مالی باز شود و راه‌هایی جدید برای قیمت گذاری ادعاهای مشروط به دست آید.

روشن است که در این مقاله امکان پاسخ به این همه پرسش وجود ندارد. بنابراین تنها به بررسی پرسش مذکور الف در چارچوب هیث - جرو - مورتون می‌پردازیم. این مقاله در ۴ بخش تنظیم شده است. بخش ۲ به بیان مفاهیم مورد نیاز اختصاص یافته است.

۲- متن

تعریف ۱. بنا به تعریف ورقه‌ی قرضه‌ی **صفر کوپن** با سررسید T قراردادی است که تضمین می‌کند در سررسید مبلغ یک دلار به دارنده‌ی آن پرداخت شود و هیچ پرداخت دیگری در طول عمر ورقه صورت نگیرد.

بدون از دست دادن کلیت فرض می‌کنیم که بازاری بدون اصطکاک از اوراق قرضه صفر کوپن و از هر سررسید مثبتی وجود دارد. قیمت چنین ورقه‌ی صفر کوپن با سررسید $T > 0$ در لحظه t را با $P_{t,T}$ نشان می‌دهیم. روشن است که قیمت اسمی ورقه عبارت است از $P_{T,T} = 1$.

۲-۱. فرض می‌کنیم این مبتنی بر فضای احتمال پالایش شده

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$$

است، که در آن $\mathcal{F}$ مجموعه‌ی پیشامدها (یک میدان سیگمایی) و

$$\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$$

پالایه‌ای از آن است، به این معنی که به ازای هر t ، $\mathcal{F}_t$ یک میدان سیگمایی است، به ازای $s \leq t$

$$\mathcal{F}_s \leq \mathcal{F}_t, \\ \mathcal{F} = \bigcup_{t \in \mathbb{F}} \mathcal{F}_t,$$

و

$$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$$

کوچک‌ترین میدان سیگمایی بر Ω است. به علاوه P اندازه‌ی احتمال عینی بازار است. فرض کنید

$$W = \{W_t\}_{t \geq 0}$$

فرایند وینر (حرکت براونی) استاندارد یک بعدی باشد که

$$\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$$

را تولید می‌کند.

توجه می‌کنیم که احتمال عینی P احتمالی است که در متن بازار فعال است و شناخت دقیق و عملیاتی کردن آن کار چندان آسانی نیست. بنابراین باید جایگزینی مناسب برای

آن پیدا کرد. این جایگزین که ممکن است یکتا هم نباشد با استفاده از قضیه‌ی گیرسانوف به دست می‌آید.

۲-۲. قضیه‌ی گیرسانوف: فرض کنید عدد ثابت $T > 0$ ، T داده شده باشد و بر بازه‌ی $t \in [0, T]$ تابع $\Theta(t)$ سازوار باشد. قرار دهید:

$$Z(t) = \exp\left\{-\int_0^t \Theta(u) dW_u - \frac{1}{2} \int_0^t \Theta^2(u) du\right\}$$

و

$$\overline{W}_t = W_t + \int_0^t \Theta(u) du.$$

اگر

$$E\left[\int_0^T \Theta^2(u) Z^2(u) du\right] < \infty$$

و

$$Z = Z(t), \bar{P}(A) = \int_A Z(\omega) dP(A)$$

آنگاه $E[Z] = 1$ و تحت اندازه‌ی احتمال $\bar{P}$ فرایند $\bar{W}(t), 0 \leq t \leq T$ یک حرکت براونی است. رابطه‌ی انتگرالی فوق را به صورت مشتقی

$$\frac{d\bar{P}}{dP} =$$

نیز می‌نویسند و Z را مشتق ردن - نیکودیم $\bar{P}$ نسبت به P می‌نامند. روشن است که

$$P(A) = 0 \Rightarrow \bar{P}(A) = 0$$

بنابراین اندازه‌های مورد بحث معادلاند.

۲-۳. سایر فرض‌های حاکم بر این بازار عبارتند از:

۱. تاریخ‌ها اعداد حقیقی نامنفی اند.

۲. در هر لحظه‌ی t پیوستاری از اوراق قرضه‌ی صفر کوپن معامله شده وجود دارد. به ازای هر سررسید $t < T, T$ یک ورقه.

۳. حساب بازار پولی وجود دارد که ارزش آن در لحظه‌ی t ، B_t است که برابر

است با سرمایه گذاری یک دلار در لحظه‌ی $t = 0$ در حساب بانکی با نرخ

بهره‌ی لحظه‌ای r_t . به عبارت دیگر B_t جواب معادله‌ی دیفرانسیل

$$dB_t = B_t r_t dt$$

با شرط اولیه

$$B_0 = 1$$

است. روشن است که

$$B_t = e^{\int_0^t r_s ds}.$$

بنابراین عامل تنزیل بین تاریخ‌های t و T عبارت است از

$$D_{t,T} = \frac{B_t}{B_T} = e^{\int_0^t r_s ds} \cdot e^{-\int_0^T r_s ds} = e^{-\int_t^T r_s ds}$$

۲-۴. لم ایتو: (یک متغیره) فرض کنید مشتقات $\frac{\partial g(t,x)}{\partial t}$ ، $\frac{\partial g(t,x)}{\partial x}$ و $\frac{\partial^2 g(t,x)}{\partial^2 x}$ تابع $g(t,x)$ پیوسته باشند و

$$dX_t = \mu(t)dt + \sigma(t)dW_t$$

فرایندی ایتو باشد. در این صورت داریم

$$dg(t, X_t) = \frac{\partial g(t, x)}{\partial t} dt + \frac{\partial g(t, X_t)}{\partial x} dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g(t, X_t)}{\partial^2 x} (dX_t)^2$$

لم ایتو برای توابع چند متغیره و دستگاهی از فرایندهای ایتو نیز برقرار است. در اینجا به بیان لم ایتوی دو متغیره می‌پردازیم.

۲-۵. لم ایتو: (دو متغیره) فرض کنید مشتقات $\frac{\partial g(t,x,y)}{\partial t}$ ، $\frac{\partial g(t,x,y)}{\partial x}$ ، $\frac{\partial g(t,x,y)}{\partial^2 x}$ ، $\frac{\partial g(t,x,y)}{\partial y}$ و $\frac{\partial^2 g(t,x,y)}{\partial^2 y}$ تابع $g(t,x,y)$ پیوسته باشند و

$$\frac{dX_t}{X_t} = \mu(t)dt + \sigma(t)dW_t$$

$$\frac{dY_t}{Y_t} = \mu'(t)dt + \sigma'(t)dW'_t$$

فرایندهای ایتو باشند. در این صورت داریم

$$dg(t, X, Y) = \left(\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial x} \mu X + \frac{\partial g}{\partial y} \mu' Y + \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \rho \sigma \sigma' XY + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial^2 x} \sigma^2 X^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial^2 y} \sigma'^2 Y^2 \right) dt + \frac{\partial g}{\partial x} \sigma X dW_t + \frac{\partial g}{\partial y} \sigma' Y dW'_t$$

که در آن ρ ضریب همبستگی فرایندهای W و W' است:

$$\rho = \frac{Cov[W, W']}{\sqrt{Var(W)} \sqrt{Var(W')}}.$$

مثال ۱. فرایند قیمت دارایی پایه در مدل بلک - شولز در فضای احتمال پالایش شده

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$$

از مدل

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$$

تبعیت می‌کند، که در آن σ و μ اعداد ثابت هستند. همچنین حساب بانکی از مدل

$$\frac{dB_t}{B_t} = rdt$$

با شرط اولیه

$$B_0 = 1$$

تبعیت می‌کند، که در آن r عددی ثابت است.

اندازه‌ی احتمال معادل $\tilde{P}$ را چنان پیدا می‌کنیم که قیمت تنزیل شده $S_t^* = \frac{S_t}{B_t}$ یک مارتینگل تحت $\tilde{P}$ باشد. ابتدا با استفاده از لم ایتوی دو متغیره ملاحظه می‌کنیم که

$$\frac{dS_t^*}{S_t^*} = (\mu - r)dt + \sigma dW_t \quad (1)$$

برای این منظور در قضیه گیرسانوف قرار می‌دهیم

$$\Theta = \frac{\mu - r}{\sigma}$$

و به دست می‌آوریم

$$\overline{W}_t = W_t + \int_0^t \frac{\mu - r}{\sigma} du = W_t + \frac{\mu - r}{\sigma} t.$$

بنابراین

$$d\overline{W}_t = dW_t + \frac{\mu - r}{\sigma} dt$$

اکنون تحت اندازه‌ی احتمال $\tilde{P}$ فرمول (۱) به

$$\frac{dS_t^*}{S_t^*} = \sigma d\overline{W}_t$$

تبدیل می‌شود. چون $\overline{W}_t$ حرکتی براونی نسبت به $\tilde{P}$ است پس S_t^* تحت اندازه‌ی احتمال $\tilde{P}$ یک مارتینگل است.

در نتیجه بازار بدون آربیتراژ است.

عامل

$$\Theta = \frac{\mu - r}{\sigma}$$

را که موجب پیدایش اندازه‌ی مارتینگل معادل و مارتینگل شدن قیمت تنزیل شده گردید قیمت بازاری ریسک می‌نامیم. علت این نام‌گذاری در این نکته نهفته است که دینامیک قیمت دارایی تحت حرکت براونی $\overline{W}_t$ عبارت است از

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma d\overline{W}_t$$

ملاحظه می‌کنیم که وقتی حساب بانکی به عنوان واحد قیمت گذاری در نظر گرفته

شود، رانش معادله‌ی حاصل برابر می‌شود با نرخ بهره‌ی بدون ریسک حساب بانکی. فرض می‌کنیم c قیمت اختیار خرید اروپایی یک سهم از دارایی مذکور باشد. در این صورت قیمت این اختیار تحت اندازه‌ی مارتینگل $\tilde{P}$ از معادله دیفرانسیل

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} + rS \frac{\partial c}{\partial S} - rc = 0 \quad (2)$$

تبعیت می‌کند

۳- مفاهیم مربوط به اوراق قرضه

۳-۱. قیمت ورقه و نرخ‌های بهره

دیدیم که مدل بلک-شولز قیمت سهم را در بازه‌ی واقعی $t \in [0, T]$ به صورت یک معادله‌ی دیفرانسیل تصادفی با شرط اولیه بیان می‌کند. به عبارت دیگر قیمت S_t متغیری تصادفی یک پارامتری با پارامتر t است.

در نتیجه به ازای هر $\omega \in \Omega$ ، مجموعه

$$\{S_t(\omega) | t \geq 0\}$$

یک منحنی است. بنابراین فرایند S_t یک منحنی تصادفی است.

این وضع، اما در مورد قیمت‌های اوراق قرضه برقرار نیست. در واقع این قیمت‌ها متغیرهای تصادفی دو پارامتری هستند. پارامتر اول زمان واقعی، t ، و پارامتر دوم سررسید ورقه، T ، است. بنابراین قیمت ورقه با سررسید T در لحظه‌ی $0 \leq t < T$ را با $P_{t,T}$ نشان می‌دهیم. روشن است که بنابه تعریف $P_{T,T} = 1$. در نتیجه فرایند $P_{t,T}$ یک رویه‌ی تصادفی است و نیم‌خط

$$x = t, y = t, z = 1, t \geq 0$$

تقریباً همه جا بر آن واقع است. فرض می‌کنیم این رویه‌ی تصادفی و بنابراین فرایند $P_{t,T}$ بقدر کافی هموار باشد. مثلاً نسبت به هر دو پارامتر مشتق‌پذیر است. البته این فرض چندان واقع بینانه نیست. با این حال با توجه به این که توابع پیوسته بر بازه‌های بسته و کراندار را می‌توان با توابع هموار (چند جمله‌ای‌ها) با هر دقتی تقریب زد، فرض بی پشتوانه‌ای هم نیست. یکی از انتخاب‌های $P_{t,T}$ که در این شرط همواری و نیز شرط $P_{T,T} = 1$ صدق می‌کند عبارت است از:

$$P_{t,T} = e^{-\int_t^T F_{t,s} ds} \quad (1)$$

که در آن $F_{t,s}$ نرخ بهره‌ی پیشرو آنی برای زمان s ، $t < s$ است که در لحظه‌ی t تعیین

شده است.

با توجه به فرمول (۱) ملاحظه می‌کنیم که $P_{t,T}$ به نرخ بهره پیشرو آنی بستگی تام دارد و انتخاب مدل برای $F_{t,s}$ تأثیری مستقیم بر رفتار $P_{t,T}$ می‌گذارد. از این فرمول به ویژه نتیجه می‌شود که

$$\log P_{t,T} = - \int_t^T F_{t,s} ds.$$

بنابراین داریم

$$F_{t,T} = - \frac{\partial \log P_{t,T}}{\partial T} \quad (2)$$

در نتیجه نرخ بهره پیشرو آنی نیز رویه‌ای تصادفی است که تقریباً همه جا به وسیله قیمت ورقه قرضه مشخص می‌شود. به ویژه نرخ بهره‌ی آنی، نرخ بهره‌ی که الان برای الان تعیین می‌شود، عبارت است از

$$R_t = F_{t,t} \quad (3)$$

ملاحظه می‌کنیم که نرخ بهره‌ی آنی یک منحنی تصادفی است. مدل سازی قیمت ورقه‌ی قرضه نسبتاً مشکل است زیرا برای این کار روش استاندارد وجود ندارد. ما این کار را با استفاده از مدل‌های برون زایی انجام می‌دهیم که برای $F_{t,T}$ و R_t در نظر می‌گیریم.

بنابراین پرسشی اساسی زیر را مطرح می‌کنیم.

پرسش. اگر مدل هر یک از R_t ، $F_{t,T}$ ، $P_{t,T}$ به صورت معادله‌ی دیفرانسیل تصادفی داده شده باشد، کدام مدل دو دیگر را نتیجه می‌دهد؟

پاسخ نسبی این پرسش را می‌توان در قضیه‌ی زیر پیدا کرد.

قضیه‌ی ۱. (Bjork 2009, pp354).

با این حال ارایه‌ی بحثی در خصوص رابطه‌ی بین قیمت ورقه و نرخ‌های بهره‌ی مذکور آموزنده است.

۳-۲. مدل‌های نرخ بهره آنی

تعریف ۱. نرخ بهره‌ای را که در لحظه t برای لحظه‌ی t تعیین می‌کند نرخ بهره‌ی آنی آنی می‌نامیم.

چون این نرخ بهره در قراردادهای تجاری معامله نمی‌شود، دینامیک آن را تحت شرایط عدم وجود آربیتراژ به صورت برون‌زا می‌توان به دلخواه انتخاب کرد. با این حال

معمولاً از مدل‌های شناخته شده مثلاً فرایند انتشار ایتوی

$$dR_t = a(R_t)dt + b(R_t)dW_t \quad (4)$$

یا فرایند ایتوی

$$dR_t = a(t, R_t)dt + b(t, R_t)dW_t \quad (5)$$

استفاده می‌کنند.

جدول ۱. تعدادی از این مدل‌ها را نشان می‌دهد.

جدول ۱. مدل‌های نرخ بهره‌ی آنی‌آنی متداول

ردیف	عنوان معادله	SDE	ویژگی‌های ضرایب
۱	مدل وسیچک	$dR_t = (b - aR_t)dt + \sigma dW_t$	$a > 0$ ثابت و b, σ
۲	کاکس-اینگرسول-راس	$dR_t = (b - aR_t)dt + \sigma\sqrt{R_t}dW_t$	a, b, σ ثابت
۳	دوتان	$dR_t = aR_tdt + \sigma R_t dW_t$	a, σ ثابت
۴	بلک-درمن-توی	$dR_t = a(t)R_tdt + \sigma(t)R_t dW_t$	
۵	هو-لی	$dR_t = a(t)dt + \sigma dW_t$	σ ثابت
۶	هال-وایت (تعمیم وسیچک)	$dR_t = (b(t) - a(t)R_t)dt + \sigma(t)\sqrt{R_t}dW_t$	$a(t) > 0$
۷	هال-وایت (تعمیم کا-این-را)	$dR_t = (b(t) - a(t)R_t)dt + \sigma(t)\sqrt{R_t}dW_t$	$a(t) > 0$
۸		$dR_t = R_t(b - a\ln(R_t))dt + \sigma R_t dW_t$	a, b, σ ثابت
۹	برنان-سوارتس (۱۹۸۰)	$dR_t = (b + aR_t)dt + \sigma R_t dW_t$	a, b, σ ثابت
		$dR_t = aR_tdt + \sigma R_t^\gamma dW_t$	a, γ, σ ثابت

قضیه ۱. دینامیک نرخ بهره آنی‌آنی تحت اندازه‌ی ریسک خنثی قیمت ورقه‌ی قرضه را کاملاً مشخص می‌کند.

برهان. مدل (۵) را در نظر می‌گیریم. ابتدا مدلی برای قیمت ورقه مشابه مدل قیمت اختیار خرید اروپایی بلک-شولز به دست می‌آوریم. این کار با توجه به ویژگی‌های نرخ بهره‌ی آنی‌آنی مستقیماً قابل انجام نیست. مثلاً R_t دارایی معامله شدنی نیست. به عبارت دیگر نمی‌توان با استفاده از R_t ریسک‌های اوراق را پوشش داد. با این حال تا جایی که ممکن است از روش بخش ۲ استفاده می‌کنیم. به ازای عدد ثابت و مثبت T قرار می‌دهیم

$$P_{t,T} = P(t, R, T)$$

و با استفاده از لم ایتو به دست می‌آوریم

$$dP_{t,T} = \mu(t, R, T)dt + \sigma(t, R, T)dW_t \quad (6)$$

که در آن

$$\mu(t, R, T) = \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial R}a(t, R_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial R^2} b^2(t, R_t)$$

و

$$\sigma(t, R, T) = \frac{\partial P}{\partial R} b(t, R_t).$$

معادله‌ای (۶) حاکم بر رفتار $P_{t,T}$ را به دست آوردیم. حال سببی تشکیل می‌دهیم متشکل از یک ورقه با سررسید T_1 (می‌خریم) و ارزش $P_1 = P_{t,T_1}$ و Δ ورقه با سررسید T_2 (می‌فروشیم) و ارزش $P_2 = P_{t,T_2}$. بنابراین ارزش سبد برابر است با

$$\Pi(t) = P_{t,T_1} - \Delta P_{t,T_2} + B_t. \quad (7)$$

بنابراین و از روابط فوق داریم

$$d\Pi = dP_1 - \Delta dP_2 + dB$$

دیفرانسیل‌های طرف چپ را از روابط متناظر

$$d\Pi = [\mu(t, R, T_1) - \Delta \mu(t, R, T_2)]dt + [\sigma(t, R, T_1) - \Delta \sigma(t, R, T_2)]dW_t + rBdt$$

قرار می‌دهیم

$$\Delta = \frac{\sigma(t, R, T_1)}{\sigma(t, R, T_2)}$$

و جمله‌ی ریسک دار را حذف می‌کنیم و به دست می‌آوریم

$$d\Pi = [\mu(t, R, T_1) - \Delta \mu(t, R, T_2)]dt + RBdt$$

جمله‌ی B را از معادله‌ی (۷) محاسبه و در این معادله قرار می‌دهیم تا به دست آوریم

$$d\Pi = [\mu(t, R, T_1) - \Delta \mu(t, R, T_2)]dt + R[\Pi - P_1 + \Delta P_2]dt$$

ملاحظه می‌کنیم که رفتار Π مشابه رفتار سرمایه در بازار پولی است و لذا

$$d\Pi = R\Pi dt$$

از مقایسه‌ی دو رابطه‌ی اخیر به دست می‌آوریم

$$\left[\mu(t, R, T_1) - \frac{\sigma(t, R, T_1)}{\sigma(t, R, T_2)} \mu(t, R, T_2) \right] dt + R \left[-P_1 + \frac{\sigma(t, R, T_1)}{\sigma(t, R, T_2)} P_2 \right] dt = 0$$

اندیس‌های ۱ و ۲ را در این رابطه جدا می‌کنیم و رابطه‌ی

$$\frac{1}{\sigma(t, R, T_1)} [\mu(t, R, T_1) - RP_1] = \frac{1}{\sigma(t, R, T_2)} [\mu(t, R, T_2) - RP_2]$$

بنابراین نسبت

$$\frac{1}{\sigma(t, R, T)} [\mu(t, R, T) - RP]$$

مستقل از T است. این عدد را قیمت بازاری ریسک می‌نامیم و با

$$\Theta(R, t) = \frac{1}{\sigma(t, R, T)} [\mu(t, R, T) - RP]$$

نشان می‌دهیم. اکنون مقادیر $\mu(t, R, T)$ و $\sigma(t, R, T)$ را در این معادله قرار می‌دهیم و معادله‌ی دیفرانسیل حاکم بر P را به صورت

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (a(t, R_t) - \Theta(R, t)b(t, R_t)) \frac{\partial P}{\partial R} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial R^2} b^2(t, R_t) - RP = 0 \quad (8)$$

با توجه به این معادله ملاحظه می‌کنیم که قیمت ورقه‌ی قرضه وقتی کاملاً تعیین می‌شود که ضرایب $a(t, R_t)$ ، $b(t, R_t)$ و $\Theta(R, t)$ مشخص شوند. اگر مثلاً $b(t, R_t)$ داده شده باشد اهمیتی ندارد که دو ضریب دیگر داده شوند، تنها کافیست جمله‌ی $a(t, R_t) - \Theta(R, t)b(t, R_t)$ داده شود. اما مطابق آنچه که در بخش ۲ دیدیم این جمله، رانش مدل نرخ بهره نسبت به اندازه‌ی ریسک خنثی است و چون ضریب انتشار مدل نرخ بهره نسبت به هر اندازه‌ی احتمالی یکی است، با توجه به فرض اثبات تمام است.

معادله (۸) مشابه معادله‌ی بلک - شولز برای قیمت اختیار خرید و کلی‌تر از آن است. معادله‌ی بلک - شولز با انتخاب شرایط اولیه جواب یکتایی دارد، اما معادله (۸) همراه با هر شرط اولیه بین‌هایت جواب دارد که به انتخاب R_t بستگی دارند.

تذکر این نکته حایز اهمیت بسیاری است که معادله‌ی (۸) را در فضای احتمال

$$(\Omega, \mathcal{F}, F, P)$$

به دست آورده‌ایم. برای به دست آوردن اندازه‌ی احتمال ریسک خنثی، $\Theta(R, t)$ را در قضیه‌ی گیرسانوف قرار می‌دهیم و اندازه‌ی احتمال معادل $\bar{P}$ را به دست می‌آوریم. اگر چه این مدل سازی بسیار پراهمیت و جذاب است اما قبل از اقدام به استفاده از مدل، خواه مدل نرخ بهره و خواه مدل قیمت ورقه‌ی قرضه باید به این سوال اساسی پاسخ داده شود که

سوال. ضرایب نرخ بهره‌ی آنی‌آنی بر اساس کدام اندازه‌ی احتمال انتخاب شده‌اند؟

فرض کنید این ضرایب بر اساس اندازه‌ی احتمال ریسک خنثی انتخاب شده باشند. مشکلی که پیش می‌آید این است که مشاهدات ما مبتنی بر اندازه‌ی احتمال عینی است. بنابراین با استفاده از روش‌های آماری استاندارد از این مشاهدات نمی‌توان برای برآورد ضریب رانش مدل نرخ بهره‌ی آنی‌آنی استفاده کرد. توجه می‌کنیم که ضریب انتشار نسبت به احتمال‌های گوناگون ناورد است.

برای برآورد ضریب رانش نرخ بهره‌ی آنی‌آنی از روش وارون سازی منحنی ثمر استفاده می‌کنیم.

روش وارون سازی منحنی ثمر.

۳-۳. مدل‌های نرخ بهره پیشرو آنی طرح هیث - جرو - مورتون

فرض کنید در لحظه‌ی t نرخ بهره‌ی پیشرو آنی تحت اندازه‌ی احتمال P در معادله

$$F_{t,T} = F_{0,T} + \int_0^t \mu_F(s, T) ds + \int_0^t \sigma_F(s, T) dW_s \quad (6)$$

یا به صورت دیفرانسیلی در معادله‌ی

$$dF_{t,T} = \mu_F(t, T)dt + \sigma_F(t, T)dW_t \quad (7)$$

صدق کند که در آن $\sigma_F(\cdot, T)$ و $\mu_F(\cdot, T)$ فرایندهایی سازوارند که با T پارامتری شده اند. بنابراین (۷) دستگاهی از معادلات تصادفی اسکالر بینهایت بعدی است.

قضیه ۲. فرض می‌کنیم برای $T > 0$ نرخ بهره‌ی پیشرو آنی تحت اندازه‌ی احتمال P در معادله‌ی (۷) صدق کند. همچنین فرض می‌کنیم بازار بدون آربیتراژ باشد. در این صورت فرایند سازوار $\Theta(t)$ مستقل از T وجود دارد که

$$\mu_F(s, T) = \sigma_F(s, T) \left[\int_s^T \sigma_F(s, u) du + \Theta(s) \right].$$

یا اگر

$$\sigma_F(s, T)^* = \int_s^T \sigma_F(s, u) du$$

آنگاه

$$\Theta(s) = \frac{\mu_F(s, T) - \sigma_F(s, T)\sigma_F(s, T)^*}{\sigma_F(s, T)}$$

برهان. به جای $F_{t,s}$ در معادله‌ی

$$\log P_{t,T} = - \int_t^T F_{t,s} ds$$

از معادله‌ی (۶) قرار می‌دهیم و به دست می‌آوریم

$$\log P_{t,T} = - \int_t^T F_{t,s} ds = - \int_t^T (F_{0,t} + \int_0^t \mu_F(u, t) ds + \int_0^t \sigma_F(u, t) dW_u) ds$$

بنابر لم ایتو داریم

$$\begin{aligned} d\log P_{t,T} &= \left((F_{0,t} + \int_0^t \mu_F(u, t) du + \int_0^t \sigma_F(u, t) dW_u) \right) dt \\ &\quad - \int_t^T (\mu_F(t, s) dt + \sigma_F(t, s) dW_t) ds \\ &= (F_{t,t} - \int_t^T \mu_F(t, s) ds) dt - \left(\int_t^T \sigma_F(t, s) ds \right) dW_t \end{aligned}$$

قرار می‌دهیم

$$\mu_F^*(t, T) = \int_t^T \mu_F(t, s) ds, \quad \sigma_F^*(t, T) = \int_t^T \sigma_F(t, s) ds$$

و به دست می‌آوریم

$$d\log P_{t,T} = (R_t - \mu_F^*(t, T)) dt - \sigma_F^*(t, T) dW_t \quad (8)$$

حال در فرمول ایتو قرار می‌دهیم $X_t = \log P_{t,T}$ و $g(t, x) = e^x$ و به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} dP_{t,T} &= de^{-\int_t^T F_{t,s} ds} \\ &= \left(e^{-\int_t^T F_{t,s} ds} \right) d\left(- \int_t^T F_{t,s} ds \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(e^{-\int_t^T F_{t,s} ds} \right) \left(d\left(- \int_t^T F_{t,s} ds \right) \right)^2 \end{aligned}$$

این رابطه را با استفاده از فرمول‌های (۱) و (۸) و فرمول‌های

$$dt \cdot dt = 0, dt \cdot dW_t = 0, (dW_t)^2 = dt$$

به صورت زیر می‌نویسیم

$$\begin{aligned} dP_{t,T} &= P_{t,T} \left\{ (R_t - \mu_F^*(t, T)) dt - \sigma_F^*(t, T) dW_t \right\} + \frac{1}{2} (\sigma_F^*(t, T))^2 dt \\ &= P_{t,T} \left\{ \left((R_t - \mu_F^*(t, T)) + \frac{1}{2} (\sigma_F^*(t, T))^2 \right) dt - \sigma_F^*(t, T) dW_t \right\} \quad (9) \end{aligned}$$

چون بازار بدون آربیتراژ است، از قضیه‌ی بنیادی اول قیمت گذاری دارایی‌ها (اگر مدل بازار احتمالی ریسک خنثی بپذیرد، در آن فرصت آربیتراژ به وجود نمی‌آید)، نتیجه می‌گیریم که برای تضمین عدم وجود آربیتراژ در بازار باید اندازه‌ی احتمال ریسک خنثی‌ای مانند Q پیدا کنیم که نسبت به آن قیمت تنزیل شده‌ی ورقه‌ی قرضه، یعنی

$$D(t)P_{t,T} = e^{-\int_0^t R(s)ds} P_{t,T}, \quad 0 \leq t \leq T$$

یک مارتینگل باشد. با توجه به

$$dD(t) = -D(t)R(t)dt$$

رابطه‌ی (۹) داریم

$$\begin{aligned} dD(t)P_{t,T} &= -D(t)R(t)P_{t,T}dt + D(t)dP_{t,T} \\ &= D(t)P_{t,T}\left\{-\mu_F^*(t,T) + \frac{1}{2}(\sigma_F^*(t,T))^2\right\} - \sigma_F^*(t,T)dW_t \end{aligned}$$

حال با استفاده از قضیه‌ی گیرسانوف جمله‌ی داخل آکولاد را به صورت

$$-\sigma_F^*(t,T)[\Theta(t)dt + dW_t]$$

می‌نویسیم. برای این منظور با تبدیل

$$\widetilde{W}_t = \int_0^t \Theta(u)du + W_t$$

ابتدا حرکت براونی W_t را به حرکت براونی $\widetilde{W}_t$ و اندازه‌ی احتمال P را به اندازه‌ی

احتمال Q تبدیل می‌کنیم و با این داده‌های جدید به دست می‌آوریم

$$dD(t)P_{t,T} = -D(t)P_{t,T}\sigma_F^*(t,T)\widetilde{W}_t$$

بنابراین $D(t)P_{t,T}$ تحت Q مارتینگل است (Q ریسک خنثی است).

حال از برابری

$$\begin{aligned} \left(-\mu_F^*(t,T) + \frac{1}{2}(\sigma_F^*(t,T))^2\right) - \sigma_F^*(t,T)dW_t \\ = -\sigma_F^*(t,T)[\Theta(t)dt + dW_t] \end{aligned}$$

به دست می‌آوریم

$$-\mu_F^*(t,T) + \frac{1}{2}(\sigma_F^*(t,T))^2 = -\sigma_F^*(t,T)\Theta(t) \quad (10)$$

این معادله را که متناظر است با سررسید ثابت و مثبت T معادله‌ی بازاری ریسک می‌نامیم. فرایند یکتای $\Theta(t)$

متناظر با این معادله را قیمت بازاری ریسک می‌نامیم. حال از معادله‌ی (۱۰) با توجه به

تعریف‌های $\mu_F^*(t,T)$ و $\sigma_F^*(t,T)$ فرایند $\Theta(t)$ به دست می‌آید. اثبات کامل است.

تعریف ۱. (ثمر تا سررسید)

فرایند سازوار

$$Y(t,T) = -\frac{1}{T-t} \ln(P_{t,T}) \quad (4)$$

را ثمر تا سررسید ورقه‌ی صفر کوپن با سررسید T می‌نامیم. این رابطه را به صورت

$$P_{t,T} = e^{-Y(t,T)(T-t)}, \quad t \in [0, T] \quad (5)$$

می‌نویسیم که نشان می‌دهد $Y(t, T)$ نرخ بهره‌ای است که تنزیل قیمت ورقه در سررسید به زمان t قیمت ورقه را در این لحظه به دست می‌دهد. از این رو تابع

$$T \rightarrow P_{t,T}$$

را تابع تنزیل می‌نامیم. همچنین با توجه به رابطه‌ی (۱) ملاحظه می‌کنیم که

$$Y(t, T) = \frac{1}{T-t} \int_t^T F_{t,s} ds$$

بنابراین ثمر تا سررسید میانگین نرخ بهره‌ی پیشرو آنی است.

تعریف ۲. (ساختار زمانی نرخ‌های بهره) تابع

$$T \rightarrow Y(t, T) \quad (6)$$

را ساختار زمانی نرخ‌های بهره یا منحنی ثمر می‌نامیم.

با توجه به رابطه‌ی (۴) روشن است که به ازای هر زمان ثابت $T > 0$ بین فرایندهای قیمت $P_{t,T}$ و فرایندهای ثمر تا سررسید $Y(t, T)$ تناظری یک به یک وجود دارد. بنابراین اگر به نحوی ساختار زمانی نرخ‌های بهره شناخته شود فرایند قیمت را می‌توان با استفاده از رابطه (۵) به دست آورد.

در عمل ساختار زمانی نرخ‌های بهره با مشاهده و با استفاده از قیمت‌های چند ابزار نرخ بهره‌ی معامله شده، مانند اسناد خزانه، اوراق قرضه‌ی خزانه، معاوضات و آتی‌ها به دست می‌آید. منحنی ثمر در هر روز به وسیله‌ی قیمت‌های بازاری آن روز به دست می‌آید. شکل این منحنی ممکن است صعودی، مسطح، نزولی و حتی قوسی باشد. تجربه نشان داده است که تغییرات ثمرهایی که سررسیدهای متفاوت دارند کاملاً هم بسته نیستند. همچنین نرخ‌های بهره‌ی آنی بیشتر از نرخ‌های بهره طولانی مدت نوسان دارند. این پدیده را می‌توان با استفاده از شکل انواع تلاطم‌های ثمر ساختار زمانی که شیب نزولی دارد تبیین کرد.

این ویژگی‌ها نشان می‌دهند که ساختن مدل قابل اعتمادی برای رفتار تصادفی ساختار زمانی نرخ‌های بهره از پیچیدگی قابل ملاحظه‌ای برخوردار است. [M,266]

۴- هندسه

بر رویه‌ی تصادفی $P_{t,T}$ دو دسته منحنی تصادفی از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند. دسته‌ی اول منحنی‌هایی هستند که از ثابت گرفتن t و متغیر گرفتن سررسیدهای T به دست می‌آیند. یک منحنی تصادفی از این نوع به ازای $t = t_0$ عبارت است از:

$$Y_0(T) = P_{t_0, T}.$$

فرض کنید T_1, T_2 ، $0 < T_1 < T_2 < T$ دو لحظه‌ی نزدیک به هم قبل از سررسید باشند. در این صورت

$$P_{t_0, T_2} - P_{t_0, T_1} = (T_2 - T_1) \frac{\partial Y_0(T_1)}{\partial T}$$

اندازه‌ی بازده ورقه در بازه‌ی زمانی کوچک $[T_1, T_2]$ است. بنابراین عنوان یک منحنی ثمر برازنده‌ی $Y_0(T)$ است. توجه می‌کنیم که منحنی ثمر یک منحنی تصادفی است و با تغییر $\omega \in \Omega$ و t_0 تغییر می‌یابد.

دسته دوم منحنی‌هایی هستند که از فرض ثابت بودن سررسید T حاصل می‌شوند.

منابع

- جلوداری ممقانی، م (۱۳۹۱)، *حسابان مالی‌وین و کاربرد آن در نظریه مالی*، (گزارش طرح تحقیقاتی).
- Baz, J. and Chacko, G., *Financial Derivatives, Pricing, Applications, and Mathematics*,
- Bjork, T., *Arbitrage Theory in Continuous Time*, Third Ed, Oxford, 2009.
- Bjork, T., *On the Geometry of Interest Rate Models*, preprint, 2005.
- Bossy, M., Gibson, R., Lhabitant, F.S., Pistre, N., and Talay, D., *A Methodology to Analyze Model Risk with an Application to Discount Bond Options in a Heath-Jarrow-Morton Framework*, (preprint) 2001.
- Heath, D., Jarrow, R., and Morton, A., *Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claim Valuation*, *Econometrica*, Vol 60, No.1 Jan 1992.
- Henry-Labordere, P., *Analysis, Geometry, and Modeling in Finance*, Chapman & Hall/CRC, 2009.
- Kennedy, D., *Stochastic Financial Models*, Chapman & Hall/CRC, 2010.
- Musiela, M. and Rutkowski, M., *Martingale Methods in Financial Modelling*, Springer, 1997.
- Shreve, S.E., *Stochastic Calculus for Finance II, Continuous- Time Models*, Springer, 2008.

