کاربرد مدل‌های کاپولا گارچ شرطی در پیش بینی نوسانات مشتقات[1]

دکتر مرتضی بکی حسکوئی[2]

چکیده:

یکی از مسایل مهم در مدیریت ریسک پیش بینی نوسانات پرتفوی متشکل از دارایی‌های مختلف است. نوسانات پرتفوی دارایی‌های مالی به ویژه مشتقات به نوسانات دارایی‌های موجود در پرتفوی و ساختار وابستگی بین دارایی‌ها بستگی دارد. با توجه به لپتوکرتیک بودن توزیع بازدهی دارایی‌های مالی عموماً از خانواده مدل‌های گارچ (GARCH) برای پیش بینی نوسانات مشتقات مالی استفاده می‌شود. ناقرینگی وابستگی بازدهی مشتقات مالی از سوی دیگر لزوم استفاده از سنجه‌های وابستگی غیر خطی را در مدل‌سازی نوسانات پرتفوی دارایی مشتقات روشن می‌سازد. کاپولاها از جمله مدل‌هایی است که می‌توان با استفاده از آن‌ها ساختار وابستگی بین دارایی‌های مالی را مدل‌سازی نمود در این مقاله انواع توابع کاپولا معرفی می‌شود. با استفاده از مدل‌های گارچ نرمال (GARCH-N) و گارچ t–اسیودنت توزیع‌های حاشیه‌ای برآورد و با استفاده از انواع توابع کاپولاها توزیع احتمال مشترک برآورد و نوسانات پرتفویی متشکل از آتی‌های S&P و FTSE100 پیش بینی و بر اساس آن ارزش در معرض خطر پرتفوی محاسبه می گردد.

واژگان کلیدی: مشتقات، ریسک پرتفوی، مدل‌های گارچ، تئوری کاپولا، مدل‌های کاپولا گارچ شرطی، ارزش در معرض خطر

طبقه‌بندی JEL: C51; F37; G11.

---

۱. مبحثی تعیین کننده در حوزه پیش بینی نوسانات مشتقات که در تاریخ دوازدهم آذرماه سال ۹۱ در نشست‌های کرسی‌های ترویجی در محل دانشکده اقتصاد دانشگاه علامه طباطبایی در حضور منتقدان محترم آقایان دکتر مسعود درخشان، دکتر عبدالساده نیسی و دکتر عبدالرحیم بادامچی‌زاده ارائه شد.

۲. عضو هیأت علمی گروه اقتصاد انرژی دانشکده اقتصاد دانشگاه علامه طباطبایی – m.baky@atu.ac.ir

۱- مقدمه:

با پیدایش نوسانات، بی‌ثباتی و تحولات متعدد در بازارهای مالی جهان در طی چند دهه اخیر آگاهی نسبت به آینده بازارها و تحولات آن‌ها به یکی از علاقه‌مندی‌ها و ضروریات عاملان اقتصادی فعال در بازارها مبدل گشته است. تاجران، خریداران، فروشندگان، دلالان، سفته بازان و حتی سیاستمداران و دولتمردان همگی مشتاقند که بدانند در آینده چه اتفاقی رخ خواهد داد، تا هم اکنون سیاست‌های مناسب را اتخاذ نمایند و درجه ریسک خود را کاهش دهند تا با داشتن اطلاعات بیشتر، یک گام از رقبای خود جلوتر باشند. پیش‌بینی نوسانات قیمت اصل و اساس فرایند کنترل و مدیریت ریسک جهت اتخاذ تدابیر راهکارهای دفاعی مرتبط با قیمت و برآورد خطرات مالی پرتفوی (سبد) یک شرکت یا سازمان می‌باشد؛ بنابراین یکی از مسایل مهم که پیشروی سرمایه گذاران است انتخاب پرتفوی بهینه و کاهش ریسک پرتفوی سرمایه گذاری است. برای این منظور باید معیار مناسبی برای سنجش ریسک پرتفوی وجود داشته باشد. سنجه‌های بسیاری برای برآورد ریسک پرتفوی توسعه و گسترش یافته است.

واریانس و نیم واریانس[1] از متداول‌ترین سنجه‌های ریسک می‌باشند. عموماً دارایی‌های مالی به ویژه بازدهی مشتقات دارای توزیع دنباله پهن می‌باشند و واریانس پرتفوی در طول زمان ثابت نیست؛ بنابراین در مدل‌سازی ریسک باید به ویژگی واریانس ناهمسانی بازدهی دارایی‌ها توجه نمود. عموماً برای برآورد واریانس دارایی‌های مالی از خانواده مدل‌های تعمیم یافته واریانس ناهمسانی شرطی[2] (GARCH) استفاده می‌شود. چنانچه پرتفویی متشکل از چند دارایی مالی با نوسانات شدید در اختیار باشد پرسش این است که چگونه می‌توان واریانس پرتفوی را برآورد نمود. در روش‌های سنتی برآورد ریسک، فرض می‌شود که توزیع احتمال مشترک بازدهی دارایی‌های موجود در پرتفوی، یک توزیع نرمال و معلوم می‌باشد. همچنین فرض می‌شود که واریانس پرتقوی دارایی‌ها به واریانس

1. Semi-Variance
2. Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity

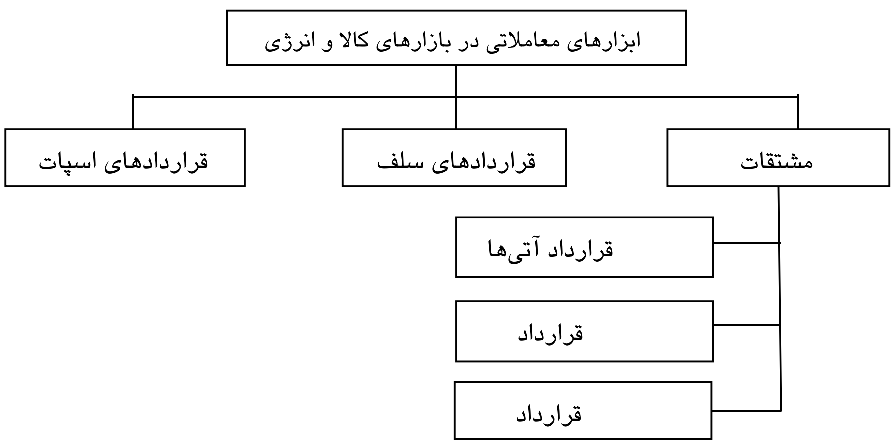
هر یک از دارایی‌ها و همچنین کواریانس آن‌ها (که نشان دهنده یک رابطه خطی بین دارایی‌هاست) بستگی دارد. در حالی که همبستگی دارایی‌ها در شرایط رونق و رکود بازار ناقرینه است و همبستگی دارایی‌ها و در نتیجه کوواریانس دارایی‌ها زمانی که بازدهی دارایی‌ها رو به افزایش است با زمانی که بازدهی‌ها رو به کاهش است یکسان نیست و فرض همبستگی خطی با محدودیت‌های جدی روبروست.

وجود دو ویژگی مهم یعنی لپتوکرتیک بودن توزیع بازدهی دارایی‌های مالی از جمله مشتقات و غیر خطی بودن ساختار وابستگی دارایی‌های موجود در پرتفوی مشتقات نیازمند یک رویکرد مناسب به منظور مدل‌سازی واریانس پرتفوی و پیش بینی نوسانات پرتفوی مشتقات است. کاپولاها[1] از جمله مدل‌هایی هستند که قابلیت مدل‌سازی وابستگی غیر خطی را در برآورد توزیع احتمال مشترک توزیع‌های حاشیه‌ای دارند. در این مقاله کاپولاها به عنوان ابزاری برای مدل‌سازی ساختار وابستگی پرتفوی مشتقات و پیش بینی نوسانات پرتفوی معرفی می‌شوند. بخش‌های این مقاله به شرح ذیل است. در بخش دوم مروری بر مفهوم مشتقات خواهیم داشت. همچنین در این بخش به ویژگی کشف قیمت آتی‌ها و تابع توزیع آتی‌ها می‌پردازیم. در بخش سوم نوسانات و دلایل اهمیت توجه به نوسانات توضیح داده می‌شود. بخش چهارم این مقاله تئوری کاپولا، انواع توابع کاپولاها و همچنین لزوم استفاده از توابع کاپولا در مدل‌سازی پرتفوی سری‌های زمانی لپتوکرتیک توضیح داده می‌شود. در بخش پنجم این مقاله ارزش در معرض خطر پرتفویی متشکل از دو دارایی با استفاده از روش‌های مختلف برآورد و مقایسه می‌شود. نتایج نشان می‌دهد نوسانات برآورد شده پرتفوی دارایی‌های لپتوکرتیک با استفاده از توابع کاپولا و همچنین ارزش در معرض برآورده شده با استفاده از توابع کاپولاها دقیق‌تر است. به منظور انتخاب بهترین تابع کاپولا از معیارهای SBC و AIC بهره برده‌ایم. نتایج نشان می‌دهد که از بین توابع کاپولای مورد استفاده تابع کاپولای جویی کلیتون متقارن مناسب‌ترین تابع برای پیش بینی نوسانات و برآورد ارزش در معرض خطر می‌باشد.

1. Copula

۲- مشتقات:

در اقتصاد مالی، «مشتقات[1]» به معنای مجموعه‌ای از ابزارها یا اسنادی است که خصوصیات مشترکی دارند. این واژه بر کلیه ابزارهای قابل معامله در بورس[2] و خارج از بورس[3] یا OTC دلالت می‌کند که مرتبط با معامله اوراق بهادار، ارز، نرخ بهره، کالا و جز این‌هاست. علت نام‌گذاری ابزارهای مشتقه[4] آن است که قیمت آن‌ها «مشتق» از قیمت «دارایی پایه[5]» آن‌هاست. مشتقات واژه جدیدی در مطالعات مالی است. شاید قبل از دهه ۱۹۹۰ این واژه کاربرد چندانی نداشت. به طور ساده می‌توان گفت که منظور از مشتقات همان ابزارهای مدیریت ریسک است. در مواردی، مشتقات را مترادف با «مهندسی مالی» [5] به کار می‌برند. برای ملاحظه جایگاه مشتقات در مجموعه ابزارهای موجود برای معامله در بازار کالا و انرژی می‌توان به نمودار زیر مراجعه کرد.



جایگاه مشتقات در مجموعه ابزارهای معاملاتی موجود

مأخذ:درخشان، مسعود. مشتقات و مدیریت ریسک در بازارهای نفت. ص۸۶

1. Derivatives
2. Exchange-traded
3. Over-The- Counter
4. Derivative Instruments
5.Underlying Asset

۲-۱. قیمت آتی‌ها برآوردی از قیمت آتی اسپات:

یکی از خصوصیات اصلی بازار آتی‌ها این است که فضای مناسبی فراهم می‌کند تا معامله‌گران بتوانند انتظارات خود را از قیمت آتی اسپات شکل دهند. بنابراین، قیمت آتی‌ها کاشف از قیمت آتی اسپات است، لذا اصطلاحاً مگفته می‌شود که قیمت آتی‌ها دارای خصوصیت کشف قیمت[1] است. قیمت آتی‌ها در واقع تخمینی از قیمت آتی اسپات است. در صورتی که قیمت آتی‌ها تخمین زننده نا اریبی[2] از قیمت آتی اسپات باشد، می‌توان انتظار داشت که در بلند مدت، میانگین تغییرات قیمت آتی‌ها، یعنی انتظار ریاضی تغییرات قیمت آتی‌ها، صفر باشد. با توجه به نظریه «پس‌بهین نرمال[3]» که بیان می‌دارد، تمایل عمومی پوشش دهندگان ریسک مبنی بر اینکه در موضع فروشنده آتی‌ها قرار بگیرند ایجاب می‌کند که قیمت آتی‌ها در خلال عمر قرارداد گرایش به افزایش داشته باشد، لذا میانگین یا انتظار ریاضی تغییرات قیمت آتی‌ها در بلند مدت باید مثبت باشد. به بیان دیگر، بر اساس نظریه پس‌بهین نرمال، قیمت آتی‌ها در مجموع، با قیمت مورد انتظار در بازار اسپات برابر نیست بلکه کمتر از آن است. این تفاوت، معادل همان سود مورد انتظار برای سفته‌بازان است که موجب شده است سفته‌بازان خطر پذیر باشند. در مطالعات کاربردی معمولاً فرض می‌کنند که قیمت آتی‌ها بهترین تخمین زننده موجود برای قیمت آتی اسپات است.

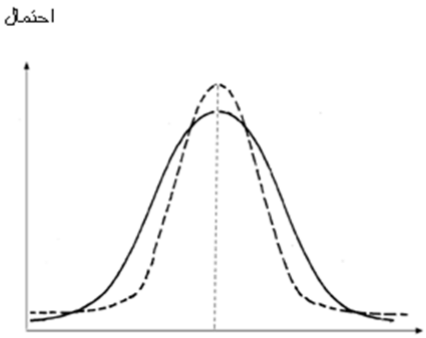
۲-۲. تابع توزیع قیمت آتی‌ها:

اکثر آزمون‌های آماری که در بررسی رفتار قیمت آتی‌ها بکار می‌رود، مبتنی بر این فرض است که تغییرات قیمت آتی‌ها دارای تابع توزیع احتمال نرمال است. با این فرض، آزمون‌های آماری بسیار ساده می‌شود. سؤال این است که آیا شواهد تجربی نرمال بودن تابع توزیع احتمال را برای قیمت آتی‌ها تأیید می‌کند؟ در پاسخ می‌توان گفت که اکثر مطالعات کاربردی در این مورد، کم و بیش به این نتیجه رسیده است که تغییرات قیمت

---

1. Price Discovery
2. Unbiased Estimator
3. Normal Backwardation

آتی‌ها دارای تابع توزیع احتمال نرمال نیست، بلکه توزیع لپتوکرتیک (Leptokurtic) دارد. خصوصیت لپتوکرتوسی بدین معنی است که تابع توزیع احتمال، شامل مشاهداتی است که تفاوت زیادی با میانگین دارند.



. توابع توزیع نرمال و لپتوکرتوسی

مأخذ:درخشان، مسعود. مشتقات و مدیریت ریسک در بازارهای نفت. ص۵۷۳.

تابع توزیع احتمال نرمال با خط پیوسته و تابع توزیع احتمال لپتوکرتیک با خط چین مشخص شده است. از این نمودار معلوم می‌شود که توزیع لپتوکرتیک در مقایسه با توزیع نرمال اولاً نوک تیزتر است، ثانیاً دنباله‌های پهن‌تر[1] دارد. در اکثر مطالعات کاربردی، با استناد به خصوصیت لپتوکرتاسی، فرضیه نرمال بودن تابع توزیع احتمال قیمت آتی‌ها قبول نشده است. استیونس وبر (۱۹۷۰) نخستین پژوهشگرانی بودند که معلوم کردند تغییرات قیمت آتی‌ها، لپتوکرتیک است. هلمز و مارتل (۱۹۸۵) نیز در تحقیقات خود، خصوصیت لپتوکرتوسی تغییرات قیمت آتی‌ها را تأیید کرده‌اند. سؤال این است که تغییرات قیمت آتی‌ها دارای چه نوع تابع توزیع احتمالی است؟ دوساک (۱۹۷۳) نشان داد که این توزیع می‌تواند پارتویی باشد، یعنی قرینگی تابع توزیع نرمال را دارد، اما نسبت به توزیع نرمال، لپتوکرتیک است. در نمودار بالا، توزیعی که با خط چین مشخص شده است در واقع همان توزیع پارتویی است.

1. Flat Tails

دسته‌ای دیگر از پژوهشگران نشان دادند که تابع توزیع قیمت آتی‌ها در ترکیبی از دو یا چند توزیع نرمال است. به بیان دیگر، با اینکه نتایج این تحقیقات نشان می‌داد که تغییرات قیمت آتی‌ها، نرمال نیست اما می‌توان آن را تقریباً معادل با ترکیبی از چند توزیع احتمال نرمال فرض کرد. هال و برورسن و ایروین (۱۹۸۹) از جمله پژوهشگرانی هستند که نتایج مهمی در این زمینه به دست آورده‌اند. حاصل آنکه فرض نرمال بودن تابع توزیع احتمال برای قیمت آتی‌ها ممکن است موجب خطا در آزمون‌های آماری باشد.

نکته دیگری که مورد توجه پژوهشگران در مطالعه قیمتِ آتی‌ها بوده است، وجود خودهمبستگی [۷] در سری زمانی تغییرات قیمت آتی‌هاست. می‌دانیم سری زمانی موقعی خود همبستگی دارد که مقدار هر مشاهده، به لحاظ آماری مرتبط با مقداری باشد که مشاهده دیگر دارد. خود همبستگی[۱] در تغییرات قیمت آتی‌ها، تأثیر زیادی در رفتار قیمت آتی‌ها دارد. اگر سری زمانی قیمتِ آتی‌ها دارای خود همبستگی مثبت و رتبه اول باشد، انتظار این است که بعد از مشاهده بازدهی مثبت در یک دوره، بازدهی دوره بعد نیز مثبت باشد. به همین ترتیب، بازدهی منفی در یک دوره، دلالت بر بازدهی منفی در دوره بعد می‌کند. هنگامی‌که سری زمانی قیمت آتی‌ها نشان دهد که خود همبستگی شدیدی وجود دارد، به سادگی می‌توان استراتژی‌های سودآوری بری معاملات طراحی کرد. فرض کنید سری زمانی قیمت آتی‌ها دارای خود همبستگی رتبه اول است. استراتژی بهینه این است که بلافاصله بعد از افزایش قیمت آتی‌ها اقدام به خرید آتی‌ها کنیم زیرا که افزایش بعدی در قیمت آتی‌ها قطعاً سودآوری خواهد داشت.

۲-۳. تغییر پذیری قیمت آتی‌ها:

تغییر پذیری قیمت آتی‌ها[۲] از مسائل مهم در تحلیل ساختار قیمت آتی‌هاست. می‌دانیم درجه تغییر پذیری برای یک متغیر، همان انحراف معیار[۳] یا جذر واریانس است. همواره

---

1. Autocorrelation
2. Volatility of Futures Prices
3. Standard Deviation

این فرضیه مطرح بوده است که معاملات در بورس‌ها و به ویژه معامله آتی‌ها، موجب افزایش درجه تغییر پذیری قیمت دارایی پایه می‌شود، لذا بازار آتی‌ها موجب بی‌ثباتی قیمت دارایی پایه در بازار اثبات است.

فرضیه تأثیر مثبت معامله آتی‌ها بر افزایش درجه تغییر پذیری قیمت دارایی پایه، غالباً برای بازار سهام مطرح است. منتقدین بازار آتی‌ها معمولاً ادعا می‌کنند که شروع بحران‌های جدید در بازار سهام، زمانی بود که معامله آتی‌های شاخص سهام[1] امکان‌پذیر شد. مدافعین این فرضیه، از سیاست نظارت و کنترل مقامات رسمی پولی و مالی بر فعالیت دست‌اندرکاران بازار آتی‌ها به شدت حمایت می‌کنند، زیرا توسعه کنترل نشده و بی‌ضابطه بازار آتی‌ها را عامل بی‌ثباتی بازار سهام می‌دانند. فرضیات دیگری نیز همواره وجود داشته است که معامله آتی‌ها را عامل مهمی در ایجاد تعادل و کاهش درجه تغییرپذیری قیمت دارایی پایه می‌داند.

پژوهشگرانی که از فرضیه تأثیر مثبت بازار آتی‌ها بر کاهش تغییر پذیری قیمت در بازار اسپات دفاع می‌کنند معمولاً به تغییرپذیری قیمت در بازار اسپات قبل و بعد از پیدایش بازار معاملات آتی‌ها استناد می‌کنند. نتایج تحقیقات انجام شده در این زمینه همسو نیست، اما می‌توان گفت که وجه غالب این تحقیقات نشان می‌دهد که معاملات در بازار آتی‌ها افزایش میزان تغییرپذیری قیمت در بازار اسپات را به دنبال نداشته است.

ساموئلسن (۱۹۶۵) برای اولین بار این فرضیه را عنوان کرد که به موازات نزدیک‌تر شدن به تاریخ انقضای آتی‌ها، تغییرپذیری قیمت آتی‌ها افزایش می‌یابد. بسیاری از پژوهشگران کوشیده‌اند این فرضیه را که به فرضیه ساموئلسن [2] معروف است، تأیید یا رد کنند. محور اصلی بحث ساموئلسن این است که درجات بالای تغییرپذیری قیمت، دلالت بر تغییرات بزرگ در قیمت دارد. اما نکته مهم این است که تغییرات بزرگ در قیمت کالا موقعی ظاهر می‌شود که اطلاعات بیشتری راجع به آن کالا در دسترس باشد. در اوایل عمر آتی‌ها، معمولاً اطلاعات زیادی درباره قیمت آتی اسپات برای دارایی پایه آن قرارداد

---

1. Stock Index Futures Trading

موجود نیست؛ با وجود این، هرچه به سمت تاریخ انقضای قرارداد نزدیک‌تر شویم سرعت رشد اطلاعات درباره دارایی پایه افزایش می‌یابد، و لذا تغییرات قیمت بزرگ‌تر می‌شود.

تجربه نشان داده است که قیمت در بازار آتی‌ها به سرعت و به شدت تغییر می‌کند، لذا منتقدین بازار آتی‌ها معتقدند که ریسک معاملات آتی‌ها بسیار بالاست. تغییرات شدید و ناگهانی قیمت را در بازار آتی‌ها نمی‌توان انکار کرد، اما این تغییرات نشان‌دهنده ورود اطلاعات جدید به بازار است. با توجه به نکات مثبتی که راجع به بازار آتی‌ها برشمردیم، اکنون می‌توان دستاورد بازار آتی‌ها را برای گروه‌های مختلف که دست اندر کاران بازارند، خلاصه کرد: هرگاه ساختار بازار چنان باشد که قیمت‌ها نسبت به اطلاعات جدید عکس‌العمل مناسبی داشته باشد، و اگر قیمت آتی‌ها تخمین خوبی از قیمت آتی مورد انتظار در بازار اسپات باشد، بازار آتی‌ها نقش خوبی در کشف قیمت ایفا خواهد کرد.

۳- تعریف نوسانات:

نوسانات درجه‌ای از بی‌ثباتی قیمت برای دارایی، نرخ یا شاخص معین است که معمولاً به صورت واریانس یا انحراف از معیار بیان می‌شود. این اصطلاح در ابتدا برای نوسان یا تغییر شدید و ناگهانی در قیمت یک نوع سهام به کار برده شده است. نوسانات به عنوان بی‌ثباتی یا تغییر بازدهی دارایی تعریف می‌شود و دامنه تغییرات بازدهی را نشان می‌دهد. تغییرات روز به روز در بازار، تصمیم‌گیری‌های خرید و فروش میلیون‌ها سرمایه‌گذار را منعکس می‌کند. ارزش‌های بزرگ بی‌ثباتی، نوسان بازدهی در یک دامنه وسیع را نشان می‌دهد که در دوره تجارت آرام [۵] (ملایم) نوسان کم و در دوره تجارت جسورانه، نوسان زیاد است.

دوره‌های نوسان بالا، اغلب به وسیله بازار هدایت شده توسط هیجانات، ایجاد می‌شوند. هیجاناتی مثل طمع و بیم و ترس و احتمال خطر می‌تواند سبب سرمایه‌گذاری بیشتر یا کمتر و در نتیجه تغییر سطح نوسانات شوند. افزایش یا کاهش نوسانات معمولاً در نتیجه تغییرات در هیجانات و مسائل روان‌شناختی سرمایه‌گذاری در بازار است. طمع و ترس و احتمال خطر اثری مهم بر نوسان و بی‌ثباتی دارند، زیرا دو عامل اصلی در ایجاد تغییر قیمت‌های

سهام هستند.

نوسانات قیمت‌ها در بازار، عبارت از اندازه میزان پراکندگی قیمت‌ها در دوره مشخصی بوده و لذا هر آن چه میزان پراکندگی قیمت بیشتر باشد، نوسانات هم بیشتر خواهد بود. یکی از عوامل مهمی که در تعیین ارزش قراردادهای آتی‌ها نقش بسیار با اهمیتی دارد، نوسانات است. نوسانات در بازار عبارت است از میزان تغییرات قیمت قراردادهای پیش خرید یا پیش فروش در یک دوره مشخص زمانی یا به عبارت دیگر اندازه‌گیری میزان پراکندگی قیمت قراردادهای پیش خرید یا پیش فروش که به کمک علم آمار از طریق محاسبه انحراف معیار استاندارد مشخص می‌گردد.

۳-۱. دلایل اهمیت نوسانات:

مدل‌سازی نوسانات قیمت‌ها در بازار، از منظر پژوهشگران دانشگاهی و نیز کارپردازان علم مالی، به لحاظ موارد استفاده آن در پیش بینی قیمت‌ها، موضوع با اهمیتی به نظر می‌رسد. این پیش‌بینی‌ها در مواردی چون مدیریت ریسک، قیمت‌گذاری مشتقات مالی و پوشش ریسک ناشی از آن‌ها، بازارسازی، انتخاب سبدهای مالی و خیلی از فعالیت‌های مالی دیگر می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد. از این جهت تخمین نوسانات یا تلاطم در بازارهای مالی، اهمیت می‌یابد .اهمیت این موضوع با نگاهی به مقالات و کتاب‌های منتشره در زمینه نوسانات قیمت و قابلیت‌های پیش‌بینی مدل‌های بی‌ثباتی متعدد، بیشتر نمایان می‌گردد و اهمیت نوسانات را در سرمایه گذاری، ارزش‌گذاری اوراق بهادار، مدیریت ریسک و اتخاذ سیاست‌های پولی منعکس می‌گرداند.

در ارتباط با مسائل اقتصادی و سری‌های زمانی مالی، مدل‌های متعددی برای نمایاندن نوسانات (واریانس شرطی) ساخته شده‌اند. یک فرض اولیه به هنگام مدل‌سازی نوسانات این است که می‌توان نوسانات را به دو بخش قابل پیش‌بینی و غیر قابل پیش‌بینی تقسیم کرد. با توجه به این حقیقت که در سری‌های زمانی مالی، ارزش اضافه ریسک تابعی از نوسانات قیمت می‌باشد، تمرکز تحقیقات علمی بر جزء قابل پیش بینی نوسانات قیمت می‌باشد. بنا بر همین واقعیت، هرچند نوسانات همان ریسک محسوب نمی‌شود؛ ولی دانستن

مقادیر نوسانات به خاطر ارتباط آن با ریسک، مهم است.

زمانی که نوسانات را به معنای عدم اطمینان تفسیر کنیم، به عنوان یکی از عوامل تأثیرگذار مهم برای تصمیمات سرمایه گذاری و ایجاد سبد دارایی مطرح می‌گردد. در واقع، نوسانات مهم‌ترین متغیر در قیمت‌گذاری مشتقات مالی محسوب می‌شود. از این حیث اندازه گیری دقیق و صحیح نوسانات به منظور قیمت گذاری این ابزارهای مالی مورد نیاز می‌باشد. با پایه‌گذاری پیمان بال در سال ۱۹۹۶، مدیریت ریسک مالی برای بسیاری از مؤسسات مالی در سرتاسر جهان جلوه مهمی پیدا کرد. در پیمان بال، پیش بینی نوسانات قیمت سهام به منظور نگهداری سرمایه ذخیره در قبال ارزش در معرض ریسک برای مؤسسات مالی به صورت اجبار درآمد. بنابراین، اندازه گیری نوسانات برای کلیه مؤسسات مالی بسیار مهم گردید.

از این گذشته، دلیل اصلی اهمیت و نگرانی در مورد تلاطم بازارهای مالی این باور است که نوسانات می‌تواند بر فعالیت‌های واقعی اقتصادی تأثیری در جهت عکس داشته باشد. این امکان که تلاطم بازار مالی چنین انعکاس گسترده‌ای می‌تواند بر اقتصاد داشته باشد، درک بالاتری از روند نوسانات را ایجاب می‌کند؛ بنابراین با اندازه گیری و درک گسترده‌تری از نوسانات، امکان پیدا کردن راه حل‌هایی به منظور کاهش تلاطم بازارهای مالی برای سیاست گذاران وجود خواهد داشت.

مسأله جهانی شدن و افزایش حجم معاملات، نیاز به کنترل و مدیریت ریسک بازار را به خوبی آشکار می‌سازد. از زمان ارائه چهارچوب میانگین-واریانس توسط مارکویتز[1] (۱۹۵۹ و ۱۹۵۲)، روش‌های متعددی برای اندازه گیری ریسک بازار مطرح شده است، برخی از این روش‌ها عبارتند از پارامترهای حساسیت ریسک با استفاده از مدل به لک شولز[2]، بازده سرمایه تعدیل شده بر مبنای ریسک[3] (RAROC)، رویکرد ریسک- دلار[4] که

1. Markowitz
2. Black-Scholes Model
3. Risk Adjusted Return On Capital
4. Risk-Dollar approach

توسط چیس منهتن[1] ارائه شد، و تجزیه و تحلیل سناریو[2] به همراه آزمون استرس[3] که در دهه ۱۹۹۰ توسعه یافت. بروز بحران‌های مالی اخیر در بازارهای خارجی و بین‌المللی منجر به تلاش جدی‌تر به منظور اندازه گیری و مدیریت ریسک‌های مالی گشته است. نظارت دقیق بر ریسک بازار، همواره مورد توجه سرمایه گذاران و مؤسسات مالی بوده است. در سال‌های اخیر، ابزارهای متعددی در حیطه مهندسی مالی و مدیریت ریسک به منظور اندازه گیری ریسک تدوین شده است. دسترسی به ابزاری که بتواند به صورت دقیق ریسک بازار را اندازه گیری نماید، همواره برای مؤسسات مالی و سرمایه گذاری به عنوان یک چالش مهم مطرح بوده است.

۳-۲. ارزش در معرض خطر (VaR) معیاری برای سنجش ریسک:

معیاری که به صورت متداول توسط تحلیل گران مالی و مؤسسات برای اندازه گیری ریسک بازار به کار می‌رود ارزش در معرض خطر[4] (VaR) می‌باشد. این معیار حداکثر کاهش در ارزش (زیان) یک سبد از دارایی‌های مالی را با احتمال مشخص ($1-\alpha$) و در یک افق زمانی[5] معین (h) مشخص می‌نماید. ارزش در معرض خطر، می‌تواند به عنوان ابزاری مفید توسط سرمایه گذاران، پوشش دهندگان ریسک[6]، معامله گران و مدیران پرتفو مورد استفاده قرار گیرد.

در روش‌های پارامتریک یک توزیع مشخص برای بازده دارایی‌ها در نظر گرفته می‌شود. در بسیاری از مطالعات از توزیع نرمال برای این منظور استفاده شده است، اما با توجه به ضعف توزیع نرمال، در مدل سازی توزیع بازده چنین مطالعاتی نتایج قابل قبولی را ارائه نداده‌اند. به کارگیری توزیع t استیودنت نیز نسبت به توزیع نرمال از این مزیت برخوردار است، که به ویژگی‌های توزیع بازده دارایی‌های مالی (کشیدگی بیشتر و دنباله

---

1. Chase Manhattan
2. Scenario Analysis
3. Stress Testing
4. Value- at- Risk
5. Time Horizon
6. Hedgers

پهن‌تر نسبت به توزیع نرمال) نزدیک‌تر است. توزیع بازده در طول زمان ثابت نیست، این واقعیت منجر به بررسی‌های گسترده برای یافتن مدلی مناسب به منظور توصیف توزیع بازده گشت. از آن جا که در روش‌های پارامتریک کلیه محاسبات با فرض درستی توزیع بازده صورت می‌پذیرد، لذا انتخاب این توزیع در دقت و صحت برآوردهای به دست آمده موثر می‌باشد.

در واقع مهم‌ترین بخش در مدل‌های VaR تخمین نوسان دارایی‌ها می‌باشد. وقتی پورتفوی از چندین دارایی تشکیل شده است، محاسبه VaR نیازمند تخمین ماتریس واریانس – کواریانس دارایی‌هاست. انگل[1] نشان داد که نوسانات بازده دارایی‌های مالی به ویژه ابزارهای مشتقه در طول زمان ثابت نیستند. مطالعات گسترده‌ای در زمینه مدل‌سازی بازده دارایی‌های مالی و مشتقات و همچنین معرفی مدل‌هایی که در آن‌ها تغییر نوسانات و خود همبستگی لحاظ شود صورت گرفت و منجر به معرفی الگوهای متنوعی نیز گشت، که در زمینه تخمین VaR نیز توسط محققان به کار گرفته شده است.

٤- کاپولا[2]:

کلمه کاپولا مفهوم لاتین می‌باشد که به معنای «پیوستن، بستن» می‌باشد. از لحاظ ریاضی، کاپولا تابعی است که به ما امکان می‌دهد تا توزیع‌های تک متغیره‌ای را برای به دست آوردن توزیع توأم با ساختار وابستگی ویژه‌ای ترکیب نماییم. در بسیاری از تئوری‌های مالی همانند تخصیص دارایی، قیمت گذاری مشتقه و مدیریت ریسک، وابستگی بین عوامل ریسک اهمیت بسیار زیادی دارد. توابع کاپولا ساختار وابسته مجموعه‌ای از متغیرها را توضیح می‌دهد و بنابراین ابزار استانداردی در مدل‌سازی وابستگی بین سری‌های زمانی، به ویژه هنگامی که محققان می‌خواهند فرض نرمال بودن را کنار بگذارند به شمار می‌رود.

1.Engle
2. Copula

٤-١. تعریف کاپولای فرعی[1]:

دو زیر مجموعه غیر تهی A_1، A_2 از R_j^* و یک تابع $G: A_1 \times A_2 \to R$ را در نظر میگیریم. کوچکترین عضو A_i(به ازایه ۱= ۲،i) را با a_i نشان می دهیم. تابعG در صورتی پایه (Grounded) نامیده می شود که به ازای هر v)، (z از $A_1 \times A_2$ داشته باشیم:

$$G\left(a_1, z\right) = 0 = G(v,)a_2 \qquad (۱-۴)$$

$G: A_1 \times A_2 \to R$، ۲- افزایشی[2] نامیده می شود که به ازای $\left[v_1,v_2\right] \times [z_1 \times z_2]$ چنانچه $v_1 \leq v_2$ و $z_1 \leq z_2$ داشته باشیم:

$$G\left(v_2,z_2\right) - G\left(v_2,z_1\right) - G\left(v_1,z_2\right) + G(v_1,z_1) \geq 0$$

(۲-۴)

طبق نظریه احتمال تبدیل احتمال– انتگرال[3] از یک جفت متغیر تصادفی X و Y، $X \to F_1(X)$ و $Y \to F_1(Y)$، دارای توزیع استاندارد یکنواخت U_i، به ازاء $i = 1,2$ است

$$F_1(X) \sim U_1 \qquad\qquad F_2(Y) \sim U_2$$

از آنجا که کاپولاها توابع توزیع توأم از متغیرهای تصادفی یکنواخت استاندارد هستند، یک کاپولا محاسبه شده بر اساس $F_1(x)$ و $F_2(y)$یک تابع توزیع توأم از (x، y) را به دست می‌دهد.

$$C\left(F_1(x),F_2(y)\right) = \Pr\left(U_1 \leq F_1(x),U_2 \leq F_2(y)\right) =$$
$$\Pr\left(F_1^{-1}(U_1) \leq x, F_2^{-1}(U_2) \leq y\right) = \Pr\left(X \leq x , Y \leq y\right) = F\left(x,y\right)$$

(۳-۴)

1. Sub-copula
2. 2-increasing
3. Probability –Integral Transformation

۴-۲. قضیه اسکلر[1] و تعریف کاپولا:

قضیه اسکلر (۱۹۵۹) ارتباط بین توزیع‌های توأم و کاپولاهای مرتبط با آن را بیان می‌نماید. طبق این قضیه، برای هر توزیع F، p بعدی، با توزیع حاشیه‌ای F_i (به ازای $i = 1،2، \dots ،p$)، یک کاپولای C وجود دارد که:

$$F\left(x_1، \dots ،x_n\right) = P\left(X_1 \le x_1، \dots ،X_n \le x_n\right) = C\left(P(X_1 \le x_1)، \dots ،P(X_n \le x_n)\right) = C(F_1(x_1)، \dots ،F_n(x_n)) \qquad (۴-۴)$$

اگر همه توزیع‌های حاشیه‌ای پیوسته باشند، کاپولای تعریف شده برابر واحد می‌باشد. از معادله بالا می‌توان دریافت که:

$$C\left(u_1، \dots ،u_p\right) = F\left(F_1^{-1}(u_1)، \dots ،F_p^{-1}\left(u_p\right)\right) \qquad (۵-۴)$$

$u_i = F_I\left(x_i\right)$ ،$i = 1,\dots,p$

هنگامی که متغیرها پیوسته باشند، فرضیه اسکلر نشان می‌دهد که هر تابع توزیع احتمال چند متغیره می‌تواند با یک توزیع حاشیه‌ای و یک ساختار وابسته نمایش داده شود که به صورت زیر مشتق می‌شود. اگر F مشتق pام باشد، چگالی توأم از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$f(x) = \frac{\partial p}{\partial x_1\, \partial x_2 \dots \partial x_p} F(x) = \prod_{i=1}^{p} f_i(x_i) \frac{\partial p}{\partial u_1\, \partial u_2 \dots \partial u_p} C\left(F_1(x_1)، \dots ،F_p\left(x_p\right)\right) \qquad (۶-۴)$$

$$f(x) = \prod_{i=1}^{p} f_i(x_i) c\left(F_1(x_1)، \dots ،F_p\left(x_p\right)\right)$$

چگالی کاپولای (Copula density) وابسته به صورت زیر می‌باشد:

1. Sklar’s Theorem

$$c\left(u_1, \ldots, u_p\right) = \frac{f\left(F_1^{-1}(u_1), \ldots, F_p^{-1}(u_p)\right)}{\prod_{i=1}^{p} f_i\left(F_i^{-1}(u_i)\right)} \qquad (۷-۴)$$

که در آن $x = \left(x_1, \ldots, x_p\right)$ و $\mathbf{c}$ تابع چگالی کاپولا می باشد.

٤-۳. خانواده کاپولاها:

کاپولای گوسین[1]، کاپولای t- استیودنت[2]، خانواده کاپولای ارشمیدسی[3]، کلیتون[4]، کلیتون چرخشی[5]، فرانک[6]، پلاکت[7]، گامبل[8]، گامبل چرخشی[9]، جویی کلیتون متقارن[10] از جمله توابع کاپولا هستند که در این مقاله معرفی و به منظور برآورد ارزش در معرض خطر یک پرتفوی مشتکل از دو دارایی بکار می‌روند. کاپولای ارشمیدسی توسط لینگ (۱۹۶۵) نام‌گذاری شد و به وسیله شوایزر و اسکلر (۱۹۶۱) برای مطالعه شناسانده شد.

٤-۳-۱. کاپولای دو متغیری گوسین

برای راحتی نمایش $u_i \equiv F_i(x_i)$ در نظر می گیریم. کاپولا گوسین (نرمال)،ترکیبی از توزیع چند متغیره نرمال است که به صورت زیر تعریف می شود:

(۸-۴)

$$C_{\text{Gaussian}}\left(u_1, u_2; \rho\right) = \Phi_\rho\left(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2)\right)$$

که در آن Φ_ρ توزیع توأم از یک توزیع نرمال استاندارد چند بعدی، با ضریب همبستگی خطی ρ می باشد و ϕ تابع توزیع نرمال استاندارد است. رابطه Gaussian روی دو

1. Gaussian Copula
2. Student-t Copula
3. Archimedian
4. Clayton Copula
5. Rotated-Clayton Copula
6. Frank Copula
7. Plackett Copula
8. Gumbel Copula
9. Rotated-Gumbel Copula
10. Symmetric Joe Clayton Copula

متغیر تصادفی X و Y به صورت زیر تعریف می شود:

$$C^{Ga}\left(v,z\right) = \phi_{\rho XY}\left(\phi^{-1}(v),\phi^{-1}(z)\right) \qquad (۹-۴)$$

که در آن $\phi_{\rho XY}$ تابع توزیع توأم یک بردار نرمال و استاندارد دو بعدی با ضریب همبستگی خطیρXY است ، ϕتابع توزیع نرمال استاندارد می باشد. از این رو :

$$\phi_{\rho XY}\left(\phi^{-1}(v),\phi^{-1}(z)\right) = \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(v)}\int_{-\infty}^{\phi^{-1}(u)}\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho_{XY}^2}}\exp\left(\frac{2r_{XY}st-s^2-t^2}{2\left(1-\rho_{XY}^2\right)}\right)ds\,dt$$

(۱۰-۴)

رونکالی (۲۰۰۲) کاپولای گوسین دو متغیری را به این شکل نشان می‌دهد

$$C^{Ga}\left(v,z\right) = \int_0^v \phi\left(\frac{\phi^{-1}(z)-\rho_{XY}\phi^{-1}(t)}{\sqrt{1-\rho_{XY}^2}}\right)dt$$

(۱۱-۴)

٤-۳-۲. کاپولای دو متغیری t –student:

اگر $t_v: R \to R$ تابع توزیع دو متغیری (مرکزی) t-student با درجات آزادی v باشد (d.o.f.):

$$t_v(x) = \int_{-\infty}^{x}\frac{\Gamma((v+1)/2)}{\sqrt{\pi v}\Gamma(v/2)}\left(1+\frac{s^2}{v}\right)^{-\frac{v+1}{2}}ds$$

(۱۲-۴)

که در آنΓ تابع اولر معمولی می‌باشد. فرض کنید که$\rho \in I$و$t_{\rho,v}$ تابع دو متغیری مربوط بهt_v باشد:

$$t_{\rho,v}\left(x,y\right) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\left(1+\frac{s^2+t^2-2\rho st}{v(1-\rho^2)}\right)^{-\frac{v+2}{2}}ds\,dt$$

(۱۳-۴)

کاپولای دو متغیری $T_{p,v}$ student به صورت زیر تعریف می شود:

$$T_{\rho,v}\left(x,y\right) = t_{\rho,v}\left(t_v^{-1}(v),t_v^{-1}(z)\right) = \int_{-\infty}^{t_v^{-1}(v)} \int_{-\infty}^{t_v^{-1}(z)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\left(1 + \frac{s^2+t^2-2\rho st}{v(1-\rho^2)}\right)^{-\frac{v+2}{2}} ds\, dt$$

(۱۴-۴)

وقتی درجات آزادی واگرا باشد ، این کاپولا به سمت رابطه Gaussian همگرا می‌شود. در تعداد محدودی از درجات آزادی، عملکرد دو کاپولا کاملاً متفاوت است.

٤-۳-۳. خانواده Fréchet:

Fréchet (۱۹۸۵) خانواده کاپولای دو پارامتری زیر را معرفی کرد:

$$C^F\left(v,z\right) = p\max\left(v+z-1\ ,0\right) + \ (1-p+q)vz + \min\left(v,z\right) = pC^- + (1-p-q)C^\perp + qC^+$$

(۱۵-۴)

که در آن $p,q \in I$ و $p + q \leq 1$. چگالی کاپولای Fréchet عبارت است از

$$C^F\left(v,z\right) = 1 - p - q \qquad (۱۶\text{-}۴)$$

این نشان می‌دهد در صورتی که دست کم یکی از p و q مثبت باشد این کاپولا دارای یک مؤلفه کاملاً پیوسته و منفرد می‌باشد.

٤-۳-٤. کاپولاهای ارشمیدسی:

کاپولاهای ارشمیدسی ممکن است با استفاده از یک تابع $\phi: I \to R^{*+}$ ،پیوسته،کاهشی، محدب ایجاد شود و به طوری که $\phi(1) = 0$. چنین تابع ϕیک مولد نامیده می شود. هرگاه $\phi(0) = +\infty$ این تابع یک مولد موکد نامیده می شود. کاپولاهای ارشمیدسی با سنجه‌های پیوستگی مربوط هستند. کاپولاهای ارشمیدسی تک پارامتری را با استفاده از یک مولد $\varphi_\alpha(t)$ ایجاد می شوند که با پارامتر (واقعی) α نشان داده می شوند. در جدول شماره ۴-۱ انواع کاپولاهای ارشمیدسی و توابع مولد آن‌ها معرفی می شود. همچنین در جدول شماره ۴-۲ سنجه‌های وابستگی مورد استفاده در

کاپولاها ارائه شده است.

جدول شماره ۴-۱: برخی از انواع کاپولاهای ارشمیدسی

گامبل (۱۹۶۰)	
$\phi_\alpha(t)$	$(-\ln t)^\alpha$
محدوده برای α	$[1,+\infty)$
$C(v,z)$	$\exp\{-[(-\ln v)^\alpha+(-\ln z)^\alpha]^{1/\alpha}\}$
کلیتون (۱۹۷۸)	
$\phi_\alpha(t)$	$\frac{1}{\alpha}(t^{-\alpha}-1)$
محدوده برای α	$[-1,0)U(0,+\infty)$
$C(v,z)$	$\max\left[(v^{-\alpha}+z^{-\alpha}-1)^{-1/\alpha,0}\right]$
فرانک (۱۹۷۹)	
$\phi_\alpha(t)$	$-\ln\frac{\exp(-\alpha t)-1}{\exp(-\alpha)-1}$
محدوده برای α	$(-\infty,0)\,U(0,+\infty)$
$C(v,z)$	$\frac{1}{\alpha}\ln\left(1+\frac{(\exp(-\alpha v)-1)\,(\exp(-\alpha z)-1)}{\exp(-\alpha)-1}\right)$

جدول شماره ٤-۲ : سنجه‌های وابستگی برای کاپولاهای ارشمیدسی

خانواده	Kendall's τ	Spearman's ρs
گامبل (۱۹۶۰)	$1-\alpha^{-1}$	بدون شکل بسته

کلیتون (۱۹۷۸)	$\alpha/(\alpha+2)$	معادله پیچیده
فرانک (۱۹۷۹)	$1 + 4\,[D_1(\alpha)-1]/\alpha$	$1 - 12\,[D_2(-\alpha)-D_1(-\alpha)]/\alpha$

ارزیابی هم شیبی کاپولای فرانک نیازمند محاسبه توابعی است که Debye نامیده می‌شوند و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D_k(\alpha) = \frac{k}{\alpha^k}\int_0^\alpha \frac{t^k}{\exp(t)-1}\,dt \text{ ،} \qquad k = 1،2 \qquad (۱۷-۴)$$

به طوری که

$$D_k(-\alpha) = D_k(\alpha) + \frac{k\alpha}{k+1} \qquad (۱۸-۴)$$

۴-۳-۵. کاپولای فرانک:

خانواده فرانک که اولین با توسط فرانک (۱۹۷۹) مطرح شده بود. کاپولای فرانک به صورت زیر بیان می‌شود:

$$C_{Frank}\left(u_1،u_2;\lambda\right) = \frac{-1}{\lambda}\log\left(\frac{\lambda(1-e^{-\lambda})-(1-e^{-\lambda u_1})(1-e^{-\lambda u_2})}{1-e^{-\lambda}}\right) \qquad (۱۹-۴)$$

که $\lambda \in (-\infty،0)\ \cup (0،+\infty)$ می‌باشد.

٤-۳-٦. کاپولای گامبل و کاپولای گامبل چرخشی:

خانواده گامبل توسط گامبل (۱۹۶۰) معرفی شد. از آنجایی که این مدل توسط هاگارد (۱۹۸۶) هم مورد بحث قرار گرفت به عنوان خانواده گامبل – هاگارد نیز شناخته می‌شود. تابع توزیع تجمعی آن به قرار زیر است:

$$C_{Gumbel}\left(u_1،u_2;\delta\right) = \exp\left(-\left((-\log u_1)^\delta + (-\log u_2)^\delta\right)^{\frac{1}{\delta}}\right) \qquad (۲۰-۴)$$

$$C_{Rotated-Gumbel}\left(u_1،u_2;\delta\right) = u_1 + u_2 - 1 + C_{Gumbel}(1 - u_1،1 - u_2;\delta) \quad (۲۱-۴)$$

که در آن $\delta \in [0،\infty)$ می‌باشد.

٤-۳-۷. کاپولای جویی کلیتون متقارن:

پیتون (۲۰۰۳) از کاپولای جویی- کلیتون تعدیل یافته برای مدل سازی بازده نرخ‌های ارز ین- دلار آمریکا و مارک- دلار آمریکا استفاده نمود. اگرچه این کاپولا محدودیتی در رابطه با وابستگی متقارن ندارد، متقارن به شمار می‌رود.

$$C_{JC}\left(u،v|\tau_U،\tau_L\right) = 1 - \left(\{[1-(1-u)^k]^{-\gamma} + [1-(1-v)^k]^{-\gamma} - 1\}^{-\frac{1}{\gamma}}\right)^{\frac{1}{k}} \quad (۲۲-۴)$$

که در آن

$$k = \frac{1}{\log_2(2-\tau_U)}$$
$$\gamma = -\frac{1}{\log_2 \tau_L}$$

$$\tau_U \in (0,1) \quad ، \quad \tau_L \in (0,1)$$

این کاپولا دو پارامتر دارد τ_U و τ_L، که به ترتیب ضرایب همبستگی دنباله ای بالا و پایین می باشند. هنگامی که $\tau_U = \tau_L$ باشد کاپولای جویی-کلیتون تقارن اندکی خواهد داشت ، که مناسب نمی باشد. برای رفع این مشکل از کاپولای تعدیل یافته استفاده می نماییم، که تحت عنوان کاپولای جویی-کلیتون متقارن معرفی می شود و به صورت زیر می باشد:

$$C_{SJC}\left(u،v|\tau_U،\tau_L\right) = 0.5C_{JC}\left(u،v|\tau_U،\tau_L\right) + 0.5C_{JC}\left(1-u،1-v|\tau_U،\tau_L\right) + u + v - 1 \quad (۲۴-۴)$$

و هنگامی که $\tau_U = \tau_L$ باشد این کاپولا متقارن خواهد بود.

۱- توابع کاپولا و تغییرات هم‌زمان[1] مشتقات:

در توابع کاپولا توزیع حاشیه‌ای هر یک از مشتقات تصریح می‌شود بنابراین توابع کاپولا روشی برای نشان دادن ساختار وابستگی[2] بین بازارها و عوامل ریسک می‌باشد. در شرایطی که توزیع بازدهی دارایی‌های مالی از جمله مشتقات نرمال نیست همبستگی خطی که معمولاً در مدیریت ریسک مورد استفاده قرار می‌گیرد ابزار مناسبی برای نشان دادن حرکت هم‌زمان مشتقات نمی‌باشد. همبستگی[3] تنها زمانی نشان دهنده حرکت هم‌زمان مشتقات مالی است که بین متغیرها یک رابطه خطی وجود داشته باشد. در این شرایط از سنجه‌های وابستگی مانند rho اسپیرمن[4] و تاو کندل[5] استفاده می‌شود. این سنجه های وابستگی به توزیع احتمال حاشیه‌ای متغیرها ارتباطی ندارند اما می‌توان نشان داد که به طور مستقیم با توابع کاپولا مرتبطند:

$$\begin{aligned} \tau &= 4\int_0^1\int_0^1 C(u,v)\,dC(u,v) - 1 \\ \rho s &= 12\int_0^1\int_0^1 C(u,v)\,du\,dv - 3 \end{aligned} \qquad (۲۵-۴)$$

۲- وابستگی دنباله‌ای[6]:

نرمال نبودن توزیع بازدهی قیمت‌های مشتقات مالی مدل‌سازی مشتقات را با مشکل دیگری به نام چولگی[7] و کشیدگی[8] و مشکلی به نام پهن بودن دنباله‌ها[9] مواجه می‌سازد. در یک فضای چند متغیره مسأله دنباله پهن بودن توزیع را می‌توان به توزیع‌های حاشیه‌ای

---

1. Co-movements
2. Dependence
3. Correlation
4. Spearman's ρ
5. Kendall's τ
6. Tail Dependence
7. Skewness
8. Leptokurtosis
9. Fat Tail

یک متغیره[1] و یا به احتمال مشترک حرکت‌های هم‌زمان بازار نسبت داد که اصطلاحاً وابستگی دنباله‌ای[2] نامیده می‌شود. کاپولا ابزار مناسبی برای مدل‌سازی دنباله‌های پهن و وابستگی دنباله‌ای‌اند

۳- برآورد پارامترهای توابع کاپولا:

در این بخش به اختصار روش‌های برآورد کاپولاها تشریح می‌شود. پارامترهای کاپولا عموماً با بهینه سازی تابع درستنمایی لگاریتمی[3] تخمین زده می‌شود:

$$\mathcal{L}(\xi; x) = \sum_{j=1}^{T}\left(\sum_{i=1}^{p}\log\left(f_i\left(x_{i,t};\phi_i\right)\right) + \log\left(c\left(F_1\left(x_{1,t}\right),\ldots,F_p\left(x_{p,t}\right);\theta\right)\right)\right) \qquad (۲۶\text{-}۴)$$

که در آن $\xi = \left(\phi,\theta\right)$ ، برداری شامل پارامتر های حاشیه‌ای، $\phi = \left(\phi_1,\ldots,\phi_p\right)$ و پارامترهای کاپولا، θ می باشد. تحت این شرایط تخمین زننده لگاریتمی حداکثر درستنمایی کارا ست.

$$\sqrt{T}\left(\hat{\theta}_{MLE} - \theta_0\right) \rightarrow N\left(0, \xi^{-1}(\theta_0)\right) \qquad (۲۷\text{-}۴)$$

که در آن $\xi^{-1}(\theta_0)$ ماتریس اطلاعات فیشر و θ_0 مقادیر واقعی می باشد. ماتریس کوواریانس $\hat{\theta}_{MLE}$ (ماتریس اطلاعات فیشر) به وسیله معکوس ماتریس هشین تابع احتمال تخمین زده می شود. به این روش اصطلاحا روش حداکثر درستنمایی دقیق[4] گفته می شود.

روش دیگری که برای برآورد توابع کاپولا استفاده می‌شود روش IFM[5] می‌باشد. پارامترهای روش IFM در دو مرحله تخمین زده می‌شود و روش تخمین آن ساده‌تر از روش ML می‌باشد. در مرحله اول پارامترهای حاشیه‌ای θ_1 بوسیله تخمین توزیع حاشیه‌ای

---

1. Marginal Univariate Distribution
2. Tail Dependence
3. Log-likelihood function
4. Exact maximum likelihood
5. Inference for the Margin

دو متغیره انجام می‌گیرد:

$$\hat{\theta}_1 = \arg\max \theta_1 \sum_{t=1}^{T} \sum_{j=1}^{n} \ln f_i\left(x_{jt}; \theta_1\right) \qquad (۲۸-۴)$$

در مرحله دوم پارامترهای کاپولا θ_2 با استفاده از پارامترهای تخمین زده شده حاشیه‌ای $\hat{\theta}_1$ انجام می شود:

$$\hat{\theta}_2 = \arg\max\ \theta_2 \sum_{t=1}^{T} \ln c(F_1(x_{1t}),F_2(x_{2t}),\ldots,F_n(x_{nt}); \theta_2, \hat{\theta}_1)$$

(۲۹-۴)

تخمین زننده IFM به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\hat{\theta}_{IFM} = \left(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2\right)'$$

(۳۰-۴)

در هر مرحله از روش ML استفاده می کنیم:

$$\sqrt{T}\left(\hat{\theta}_{IFM} - \theta_0\right) \to N\left(0, V^{-1}(\theta_0)\right)$$

(۳۱-۴)

٤- برآورد ارزش در معرض خطر پرتفویی متشکل از دو دارایی:

در این بخش پرتفویی متشکل از دو دارایی در نظر گرفته می‌شود. ابتدا توزیع حاشیه‌ای هر یک از دارایی‌ها بررسی می گردد. در ادامه ارزش در معرض خطر پرتفوی محاسبه می‌گردد. برای این منظور فرض می‌کنیم که بازده دارایی‌های مفروض توسط $\{X_t\}\ t = 1, \ldots, T$ نشان داده می شود. فرض می‌کنیم نوسانات هر دارایی دارای فرایند GARCH(۱,۱) با تغییرات استاندارد به ترتیب دارای توزیع نرمال استاندارد (GARCH-n) یا توزیع استیودنت-t استاندارد (GARCH-t) باشد. از اینرو مدل به صورت زیر تعریف می شود:

$$x_t = \mu + a_t \qquad (۱-۵)$$

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t$$
$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$$

$\varepsilon_t \sim N(0،1)$ یا $\varepsilon_t \sim t_d$

در اینجا، $\mu = E(x_t) = E\big(E(x_t|\Omega_{t-1})\big) = E(\mu_t) = \mu$ میانگین غیر شرطی از مجموعه بازده‌ها می‌باشد و $\sigma_t^2 = Var(x_t|\Omega_{t-1}) = Var(a_t|\Omega_{t-1})$ واریانس شرطی ، $\alpha_0 > 0$ و $\alpha_1 \geq 0$ و $\beta \geq 0$ ، $\alpha_1 + \beta < 1$ و Ω_{t-1} مجموعه اطلاعات ما در زمان $t-1$ می باشد. در حالت نرمال $\alpha_1 + \beta < 1$ برای ایستایی کوواریانس و فرآیند همسویی کافی است و در نتیجه واریانس غیر شرطی a_t کراندار است، در حالیکه واریانس شرطی σ_t^2 نسبت به زمان تغییر می نماید. در مورد توزیع های غیر نرمال، شرط $\alpha_1 Var(\varepsilon_t) + \beta < 1$ برقرار است. d مبین درجه آزادی است. روشی که در اینجا برای تخمین پارامترها استفاده می شود، روش MLE می باشد.

اگر $\Omega_{t-1} = \{a_0،a_1، \ldots ،a_{t-1}\}$ باشد، تابع چگالی توام می‌تواند به صورت $f(a_1، \ldots ،a_t) = f(a_t|\Omega_{t-1})f(a_{t-1}|\Omega_{t-2}) \ldots f(a_1|\Omega_0)f(a_0)$ نوشته شود.

تابع راستنمایی لگاریتمی داده‌های مفروض $a_1، \ldots ،a_t$ به صورت زیر می باشد:

$$LLF = \sum_{k=0}^{n-1} f(a_{n-k}|\Omega_{n-k-1}) \qquad (۲-۵)$$

این معادله می‌تواند برای تخمین مدل معادلات نوسان برای هر نوع توزیع مفروضی برای ε_t استفاده شود. در اینجا LLF می تواند به صورت عددی بیشینه شده و به MLE تبدیل شود. اگر مشاهدات $(x_1،x_2، \ldots ،x_t)$ باشد توزیع حاشیه‌ای شرطی X_{t+1} را به صورت رابطه (۸-۳) تعریف می شود:

$$P(X_{t+1} \leq x|\Omega_t) = P(a_{t+1} \leq (x-u)|\Omega_t) =$$

$$P\left(\varepsilon_{t+1} \leq \frac{(x-\mu)}{\sqrt{\alpha_0+\alpha_1 a_t^2+\beta\sigma_t^2}}\middle|\Omega_t\right) =$$

$$\begin{cases} N\left(\frac{(x-\mu)}{\sqrt{\alpha_0+\alpha_1 a_t^2+\beta\sigma_t^2}}\middle|\Omega_t\right)\text{، if } \varepsilon\sim N(0\text{،}1) \\ t_d\left(\frac{(x-\mu)}{\sqrt{\alpha_0+\alpha_1 a_t^2+\beta\sigma_t^2}}\middle|\Omega_t\right)\text{، if } \varepsilon\sim t_d. \end{cases} \quad (۳-۵)$$

علاوه بر این می‌توان فرض کرد که سری‌های مورد مطالعه را بر اساس مدل گارچ GJR[1] پیش بینی نمود. در مدل GJR، فرآیند مولد نوسان به صورت زیر می‌باشد، که GJR-n به این معناست که نوسانات دارای توزیع نرمال استاندارد می‌باشند و GJR-t مبین آن است که نوسانات دارای توزیع استیودنت t استاندارد می‌باشد.

$$x_t = \mu + a_t \quad (۵-۴)$$

$$a_t = \sigma_t\varepsilon_t$$
$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2 + \gamma s_{t-1} a_{t-1}^2$$
$$\varepsilon_t \sim N(0,1) \text{ or } \varepsilon_t \sim t_d$$

که $s_{t-1} = \begin{cases} 1\text{،} & a_{t-1} < 0 \\ 0\text{،} & a_{t-1} \geq 0 \end{cases}$ می باشد.

توزیع حاشیه‌ای شرطی X_{t+1} همانند مدل گارچ به صورت زیر می باشد:

$$P(X_{t+1} \leq x|\Omega_t) = P(a_{t+1} \leq (x-u)|\Omega_t) =$$
$$P\left(\varepsilon_{t+1} \leq \frac{(x-\mu)}{\sqrt{\alpha_0+\alpha_1 a_t^2+\beta\sigma_t^2+\gamma.s_t\varepsilon_t^2}}\middle|\Omega_t\right) =$$

1. Glosten-Jagannathan-Runkle GARCH

$$\begin{cases} N\left(\frac{(x-\mu)}{\sqrt{\alpha_0+\alpha_1 a_t^2+\beta\sigma_t^2+\gamma.s_t\varepsilon_t^2}}\middle|\Omega_t\right)، \text{اگر } \varepsilon\sim N(0،1) \\ t_d\left(\frac{(x-\mu)}{\sqrt{\alpha_0+\alpha_1 a_t^2+\beta\sigma_t^2+\gamma.s_t\varepsilon_t^2}}\middle|\Omega_t\right)، \text{اگر } \varepsilon\sim t_d. \end{cases}$$

(۵-۵)

ارزش در معرض خطر (VaR) یک پرتفو در زمان t ($t-\Delta t$ تا t)، با سطح اطمینان -۱) α) که در آن $\alpha \in (0،1)$ می‌باشد، به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$VaR_t(\alpha) = \inf\{s: F_t(s) \geq \alpha\}$$ (۶-۵)

که در آن F_t تابع توزیع بازده پرتفو $X_{p،t}$ در زمان t بوده و در نتیجه خواهیم داشت:

$$P\left(X_{p،t} \leq VaR_t(\alpha)|\Omega_{t-1}\right) = \alpha$$ (۷-۵)

این بدین معناست که ما $100(1-\alpha)\%$ اطمینان داریم که زیان در دوره Δt بیشتر از VaR نخواهد بود. Ω_{t-1} به معنای مجموعه ای از اطلاعات در زمان t-۱ می باشد. در نظر می گیریم که بازده پرتفو $X_{p،t}$ شامل بازده دو دارایی باشد که با $X_{1،t}$ و $X_{2،t}$ نشان داده می شود. معادله بازده پرتفوی به صورت زیر می باشد:

$$X_{p،t} = \omega X_{1،t} + (1-\omega)X_{2،t}$$

(۸-۵)

در اینجا ω و $(1-\omega)$ اوزان پرتفوی دارایی ۱ و ۲ می باشند؛ بنابراین بازده پرتفوی به صورت زیر تعریف می شود:

$$P\left(X_{p،t} \leq VaR_t(\alpha)\middle|\Omega_{t-1}\right) =$$

$$P\left(\omega X_{1،t} + (1-\omega)X_{2،t} \leq VaR_t(\alpha)\middle|\Omega_{t-1}\right) =$$

$$P\left(X_{1،t} \le \frac{VaR_t(\alpha)}{\omega} - \frac{1-\omega}{\omega} X_{2،t} \middle| \Omega_{t-1}\right) = \alpha$$ (۵-۹)

وزن دو دارایی برابر فرض شده است، اما این یک محدودیت نمی‌باشد و می‌تواند به طور آزادانه تغییر کند. این بدان معناست که $\omega = \frac{1}{2}$ در صورتی که سطح اطمینان α برابر ۰.۰۵ فرض شود خواهیم داشت:

$$P\left(X_{p،t} \le VaR_t(\alpha) \middle| \Omega_{t-1}\right) =$$
$$P\left(\frac{1}{2}X_{1،t} + \frac{1}{2}X_{2،t} \le VaR_t(\alpha) \middle| \Omega_{t-1}\right) =$$
$$P\left(X_{1،t} \le \frac{VaR_t(\alpha)}{\frac{1}{2}} - X_{2،t} \middle| \Omega_{t-1}\right) = 0.05$$ (۵-۱۰)

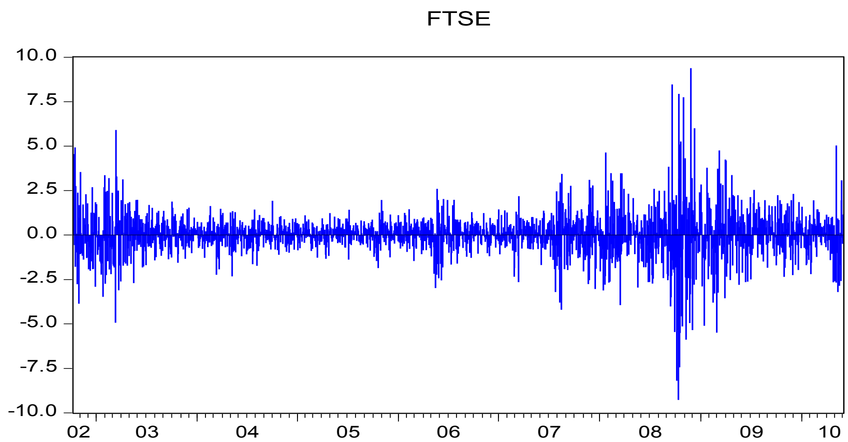
از آنجایی که بازده پرتفوی پیوسته است، فرمول تخمین VaR به صورت زیر تعریف و قضیه اسکالر نیز در اینجا بیان می‌شود:

$$P\left(X_{p،t} \le VaR_t(\alpha) \middle| \Omega_{t-1}\right) =$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\frac{VaR_t(\alpha)}{\frac{1}{2}}} f\left(x_{1،t}،x_{2،t} \middle| \Omega_{t-1}\right) dx_{1،t}dx_{2،t} =$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\frac{VaR_t(\alpha)}{\frac{1}{2}}} c\left(F\left(x_{1،t}\right)،F\left(x_{2،t}\right) \middle| \Omega_{t-1}\right) f\left(x_{1،t} \middle| \Omega_{t-1}\right) \times$$
$$f\left(x_{2،t} \middle| \Omega_{t-1}\right) dx_{1،t}dx_{2،t}$$ (۵-۱۱)

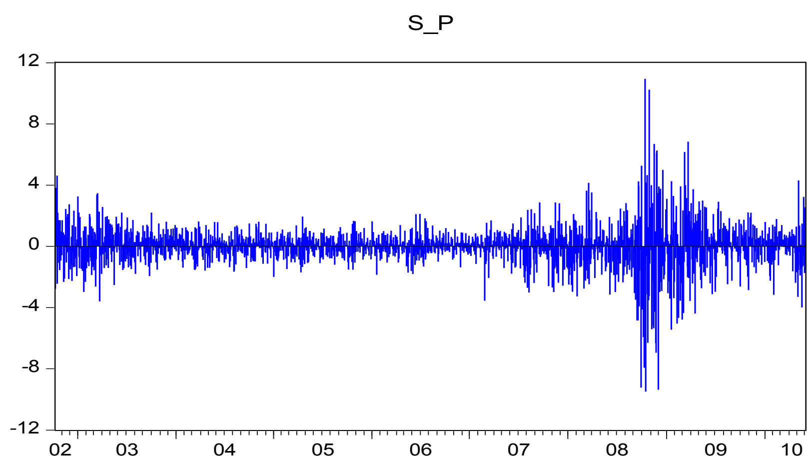
۱- داده‌ها:

در این بخش پرتفویی متشکل از آتی‌های شاخص‌های S&P و FTSE100 عملکرد کاپولا-گارچ شرطی برای دوره زمانی ۲۰۰۲/۱۰/۰۸ تا ۲۰۱۰/۰۶/۰۳ مورد ارزیابی می‌گیرد. از این میان تعداد ۱۹۰۱ مشاهده روزانه برای آزمون انتخاب می‌شود. نمودار (۸-۱) و (۸-۲) بازدهی نوسانات دو شاخص را نشان می‌دهد. به راحتی می‌توان پدیده

خوشه‌ای بودن واریانس داده‌ها را در داده‌های تحقیق مشاهده نمود. در ادامه ارزش در معرض خطر پرتفوی دارایی‌ها با استفاده از مدل‌های کاپولا و همچنین روش‌های شبیه سازی تاریخی[1] و میانگین متحرک نمایی[2] ارزش در معرض خطر پرتفوی برآورد و مقایسه می‌گردد.



نمودار شماره ۸–۱: نوسان بازده FTSE



نمودار شماره ۸–۲: نوسان بازده S&P

1. Historical Simulation
2. Exponential Weighted Moving Average

۲- تحلیل آماری از داده‌ها:

همان‌طور که در بخش‌های پیشین اشاره شد توزیع بیشتر داده‌های مالی نرمال نیست و فرض نرمال بودن توزیع می‌تواند به نتایج نادرستی بیانجامد. برای دست‌یابی به توزیع احتمال بازدهی داده‌ها ابتدا آماره‌های توزیع استخراج می‌گردد. جدول شماره (۵-۱) آماره‌های توزیع را نشان می‌دهد. با توجه به جدول چولگی داده‌های مربوط به شاخص FTSE مثبت (۷.۸۹E-۰۵) و S&P منفی (۰.۲۰۹۹۴۵-) می‌باشد. همچنین از جدول زیر می‌توان دریافت که کشیدگی در شاخص بیشتر از ۳ می‌باشد. به عبارت دیگر توزیع بازدهی هر یک از داده‌ای تحقیق نسبت به توزیع نرمال کشیده‌تر است؛ بنابراین نرمال بودن توزیع بازدهی دارایی‌ها رد می‌شود. بر اساس آماره جاک- به را نیز فرض نرمال بودن بازدهی توزیع قویاً رد می‌شود. این آماره دارای توزیع $\chi^2(p)$ است. بر اساس نتایج تحقیق آماره فوق برای S&P و FTSE به ترتیب ۸۴۲۵.۲۹۵ و ۵۱۲۵.۵۱۶ می‌باشد. مقایسه مقادیر آماره فوق با مقادیر بحرانی فرض صفر رد می‌شود.

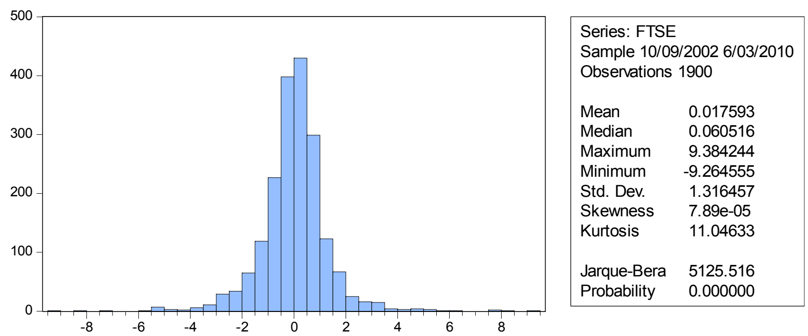
جدول شماره ۵-۱: آمارهای توصیفی بازدهی داده‌ها

Sample: ۱۰/۰۹/۲۰۰۲ ۶/۰۳/۲۰۱۰		
	FTSE	S&P
Mean	۰.۰۱۷۵۹۳	۰.۰۱۶۹۹۱
Median	۰.۰۶۰۵۱۶	۰.۰۸۳۹۳۷
Maximum	۹.۳۸۴۲۴۴	۱۰.۹۵۷۲۰
Minimum	-۹.۲۶۴۵۵۵	-۹.۴۶۹۵۱۴
Std. Dev.	۱.۳۱۶۴۵۷	۱.۳۷۷۸۶۹
Skewness	۷.۸۹E-۰۵	-۰.۲۰۹۹۴۵
Kurtosis	۱۱.۰۴۶۳۳	۱۳.۳۰۷۶۹
Jarque-Bera	۵۱۲۵.۵۱۶	۸۴۲۵.۲۹۵
Probability	۰.۰۰۰۰۰۰	۰.۰۰۰۰۰۰

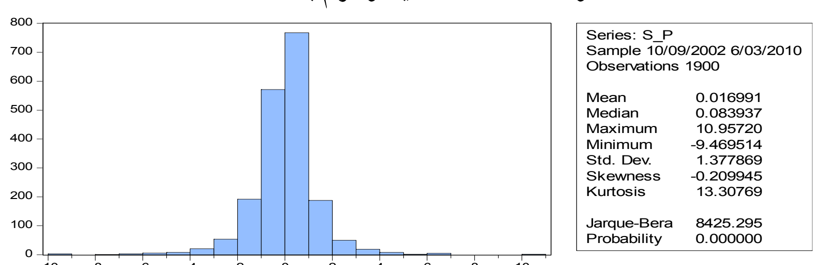
Sum	۳۳.۴۲۶۷۹	۳۲.۲۸۳۷۳
Sum Sq. Dev.	۳۲۹۱.۰۷۹	۳۶۰۵.۲۹۵
Observations	۱۹۰۰	۱۹۰۰

نمودار هیستوگرام داده‌ای تحقیق به ترتیب در نمودار (۵-۱) و (۵-۲) نشان داده شده است. مطابق نمودارهای فوق فرض نرمال بودن توزیع بازدهی دارایی‌های مورد مطالعه رد می‌شود. همچنین بر اساس خروجی‌های به دست آمده آماره جارک- به را (Jarque-Bera) و p-value آن حاکی از آن است که فرضیه صفر مبنی بر نرمال بودن داده‌ها رد می‌شود.

نمودار شماره ۵-۱: هیستوگرام بازده FTSE



نمودار شماره ۵-۲: هیستوگرام بازده S&P



در ادامه به منظور بررسی پدیده خود همبستگی واریانس‌ها می‌پردازیم. برای این منظور

از آزمون انگل برای بررسی اثر ARCH استفاده می‌شود. نتایج آزمون در جدول شماره (۵-۲) گزارش شده است. نتایج نشان می‌دهد که در سطح احتمال ۱ و ۵ درصد و طول وقفه‌های مختلف فرض صفر مبنی بر وجود عدم خود همبستگی رد می‌شود.

جدول شماره ۵– ۲ : آزمون ARCH بر روی بازده

Engle – Test									
	S&P				FTSE				
lags	Boolean decisions for the tests (h_0=no autocorrelation in favor of the alternative	p-values	test statistics	critical values	Boolean decisions for the tests (h_0=no autocorrelation in favor of the alternative	p-values	test statistics	critical values	α
۲	۱	۰	۳۳۰.۱۳۲۵	۹.۲۱۰۳	۱	۰	۲۱۸.۱۸۲۰	۹.۲۱۰۳	
۴	۱	۰	۳۸۷.۷۳۴۴	۱۳.۲۷۶۷	۱	۰	۳۸۲.۰۱۰۸	۱۳.۲۷۶۷	
۶	۱	۰	۵۳۴.۴۹۵۱	۱۶.۸۱۱۹	۱	۰	۴۲۶.۴۸۰۲	۱۶.۸۱۱۹	۰.۰۱
۸	۱	۰	۵۶۲.۹۱۹۵	۲۰.۰۹۰۲	۱	۰	۴۳۳.۲۴۶۲	۲۰.۰۹۰۲	
۱۰	۱	۰	۵۸۶.۸۲۰۳	۲۳.۲۰۹۳	۱	۰	۴۷۷.۵۱۲۷	۲۳.۲۰۹۳	
۲	۱	۰	۳۳۰.۱۳۲۵	۵.۹۹۱۵	۱	۰	۲۱۸.۱۸۲۰	۵.۹۹۱۵	
۴	۱	۰	۳۸۷.۷۳۴۴	۹.۴۸۷۷	۱	۰	۳۸۲.۰۱۰۸	۹.۴۸۷۷	
۶	۱	۰	۵۳۴.۴۹۵۱	۱۲.۵۹۱۶	۱	۰	۴۲۶.۴۸۰۲	۱۲.۵۹۱۶	۰.۰۵
۸	۱	۰	۵۶۲.۹۱۹۵	۱۵.۵۰۷۳	۱	۰	۴۳۳.۲۴۶۲	۱۵.۵۰۷۳	
۱۰	۱	۰	۵۸۶.۸۲۰۳	۱۸.۳۰۷۰	۱	۰	۴۷۷.۵۱۲۷	۱۸.۳۰۷۰	

علاوه بر این به منظور بررسی وجود خود همبستگی اجزاء اختلال از آزمون لیانگ – باکس بهره برده‌ایم. نتایج این آزمون در جدول شماره (۵–۳) گزارش ده است. نتایج نشان

می‌دهد که چنانچه فرایندها GARCH-n و GARCH-t، GJR-n و GJR-t شود در تمامی حالات در سطح احتمال ۱ و ۵ درصد فرض صفر عدم خود همبستگی در وقفه‌های زمانی ۲، ۴، ۶ و ۸ در تست Engle و وقفه‌های زمانی ۵،۳،۱ و ۷ در تست Ljung در سطح ۰.۰۵ و ۰.۰۱ رد می‌شود؛ بنابراین مدل‌های GARCH و GJR بر روی داده‌ها قابل اجرا می‌باشد.

جدول شماره ۵-۳: آزمون Box Ljung-

Ljung – Box Test									
	S&P				FTSE				
lags	Boolean decisions for the tests (h_0=no autocorrelation in favor of the alternative	p-values	test statistics	critical values	Boolean decisions for the tests (h_0=no autocorrelation in favor of the alternative	p-values	test statistics	critical values	α
1	1	0	29.3304	6.6349	1	0	15.6808	6.6349	0.01
3	1	0	52.7939	11.3449	1	0	23.9764	11.3449	
5	1	0	56.0741	15.0863	1	0	45.9047	15.0863	
7	1	0	61.7395	18.4753	1	0	50.9996	18.4753	
9	1	0	64.5592	21.6660	1	0	53.4686	21.6660	
1	1	0	29.3304	3.8415	1	0	15.6808	3.8415	0.05
3	1	0	52.7939	7.8147	1	0	23.9764	7.8147	
5	1	0	56.0741	11.0705	1	0	45.9047	11.0705	
7	1	0	61.7395	14.0671	1	0	50.9996	14.0671	
9	1	0	64.5592	16.9190	1	0	53.4686	16.9190	

۳- توزیع حاشیه‌ای:

با توجه به اینکه به بازده دارایی‌ها دارای واریانس ناهمسانی می‌باشد برای برآورد نوسانات پرتفوی و برآورد ارزش در معرض خطر پرتفوی ابتدا لازم است که توزیع حاشیه‌ای بازده دارایی‌ها برآورد شود. بر این اساس توزیع حاشیه‌ای یکنواخت که در بخش‌های قبل توضیح داده شد را در نظر می‌گیریم. مدل‌های کلاسیک GARCH و GJR را بر روی داده‌ها به عنوان مدل اولیه پیاده می‌کنیم. این دو مدل هر کدام در ۲ حالت نرمال و t در نظر گرفته شده و با هم مقایسه می‌شود. داده‌ها به دو دسته تقسیم می‌شوند. تعداد ۱۲۰۰ مشاهده برای تخمین و انتخاب برازنده‌ترین مدل و ۷۰۰ داده برای آزمون نتایج حاصل از داده‌های دسته اول در نظر گرفته می‌شود؛ بنابراین توزیع حاشیه‌ای را بر روی

۱۲۰۰ داده انجام می‌دهیم. نتایج برآورد مدل GARCH-n، GARCH-t، GJR-n و GJR-t به ترتیب در جداول (۵-۴)، (۵-۵)، (۵-۶) و (۵-۷) گزارش شده است. به منظور تعیین طول وقفه بهینه در هر یک از توزیع‌های حاشیه‌ای برآورد شده از معیارهای AIC و SBC بهره برده‌ایم.

جدول شماره ۵

Estimation output of GARCH-n						
Parameter	S&P			FTSE		
	Value	St.Error	t-stats	Value	St.Error	t-stats
c_0	0.0534	0.021	2.5820	0.0601	0.020	3.0100
c_1	-0.0696	0.030	-2.3025	-0.0879	0.031	-2.8120
α_0	0.0140	0.008	1.8505	0.0145	0.006	2.3961
α_1	0.0571	0.015	3.7792	0.0888	0.022	4.0960
β	0.9211	0.021	44.0482	0.8898	0.026	34.1288
	Akaike = 2816.3542			Akaike =2807.2822		
	BIC =2841.8046			BIC =2832.7326		
	Log Likelihood = -1403.177			LogLikelihood =-1398.641		

جدول شماره ۵-۵: برآورد توزیع حاشیه‌ای GARCH-t

Estimation output of GARCH-t						
Parameter	S&P			FTSE		
	Value	St.Error	t-stats	Value	St.Error	t-stats
c_0	0.0646	0.020	3.1675	0.0699	0.020	3.4850
c_1	-0.0690	0.027	-2.5802	-0.0879	0.030	-2.8992
α_0	0.0067	0.004	1.5916	0.0136	0.006	2.1706
α_1	0.0539	0.015	3.6227	0.0848	0.023	3.6667
β	0.9373	0.018	52.9574	0.8959	0.029	31.4196
d	8.9554	2.680	3.3418	10.8404	2.979	3.6394
	Akaike =2785.6113			Akaike =2786.6857		
	BIC =2816.1517			BIC =2817.2262		
	Log Likelihood =-1386.806			LogLikelihood =-1387.343		

جدول شماره ۵-۶: برآورد توزیع حاشیه‌ای GJR-n

Estimation output of GJR-n						
Parameter	S&P			FTSE		
	Value	St.Error	t-stats	Value	St.Error	t-stats
c_0	0.0338	0.021	1.5727	0.0419	0.020	2.0888
c_1	-0.0691	0.029	-2.3782	-0.0878	0.031	-2.7953
α_0	0.0137	0.008	1.6500	0.0164	0.006	2.6456
α_1	0.0175	0.012	1.4081	0.0399	0.021	1.8605

β	0.9185	0.024	37.7924	0.8869	0.025	34.8312
γ	0.0871	0.030	2.8561	0.0938	0.035	2.7062
	Akaike =2801.4599			Akaike =2793.4064		
	BIC =2832.0004			BIC =2823.9468		
	Log Likelihood =-1394.730			LogLikelihood =-1390.703		

جدول شماره ۵-۷: برآورد توزیع حاشیه‌ای GJR-t

Estimation output of GJR-t						
Parameter	S&P			FTSE		
	Value	St.Error	t-stats	Value	St.Error	t-stats
c_0	0.0481	0.021	2.3201	0.0520	0.021	2.5102
c_1	-0.0648	0.027	-2.3582	-0.0882	0.030	-2.8971
α_0	0.0060	0.005	1.2908	0.0153	0.006	2.5012
α_1	0.0119	0.009	1.3028	0.0290	0.017	1.6870
β	0.9368	0.019	48.2050	0.8923	0.026	34.8313
γ	0.0863	0.030	2.8323	0.1088	0.035	3.0959
d	9.5014	3.003	3.1639	11.4655	3.383	3.3888
	Akaike = 2770.5095			Akaike = 2772.6923		
	BIC =2806.1400			BIC =2808.3228		
	Log Likelihood =-1378.255			LogLikelihood =-1379.346		

همان‌طور که مشاهده می‌شود برخی از پارامترهای توزیع‌های حاشیه‌ای از نظر آماری معنادار نمی‌باشند اما معناداری مدل‌های برآورد شده رد نمی‌شود. بدین منظور هر یک از مدل‌های برآورد شده کاندیدای برآورد کاپولا می‌شود. با این وجود انتظار می‌رود که تنها تعدادی از مدل‌های کاپولا- گارچ از برازندگی لازم برای توضیح نوسانات پرتفوی برخوردار باشند.

٤- تخمین پارامترهای کاپولا:

در این بخش کاپولاهای معرفی شده برآورد می‌گردد. همان‌طور که در بخش قبل اشاره شد از تمام مدل‌های توزیع حاشیه‌ای به منظور برآورد پاراکترهای توابع کاپولا

استفاده می‌شود. به منظور انتخاب بهترین تابع کاپولا بر اساس معیارهای AIC و BIC تصمیم گیری می‌شود. نتایج برآورد انواع توابع کاپولا در جدول شماره (۵-۷) گزارش شده است. نتایج نشان می‌دهد که بر اساس آماره‌های فوق، مدل کاپولای جویی-کلیتون قرینه (SJC) بیشترین برازندگی را بر روی داده‌ها دارد، از این میان نیز SJC-GARCH-n دارای بیشترین برازندگی بوده و کم‌ترین AIC و BIC را دارا می‌باشد.

جدول شماره ۵-۸: برآورد پارامترهای توابع کاپولا

Copula	Parameter	GARCH-n	GARCH-t	GJR-n	GJR-t
Gaussian	ρ	0.4597	0.4588	0.4619	0.4599
	LLF	-142.4156	-141.8037	-143.9511	-142.5793
	AIC	-284.8295	-283.6058	-287.9005	-285.1569
	BIC	-284.8253	-283.6015	-287.8963	-285.1527
Student-t	ρ	0.4591	0.4584	0.4619	0.46
	v	6.6636	6.5623	8.2065	8.1036
	LLF	-154.4603	-154.3529	-152.0311	-150.81
	AIC	-309.1173	-308.7024	-304.0588	-301.6166
	BIC	-309.1089	-308.6939	-304.0503	-301.6082
Clayton	ω	0.6458	0.6409	0.6371	0.6327
	LLF	-115.4086	-114.1081	-113.932	-112.7339
	AIC	-230.8156	-228.2145	-227.8624	-225.4661
	BIC	-230.8113	-228.2103	-227.8582	-225.4619
Rotated - clayton	ω	0.6469	0.6506	0.6439	0.6415
	LLF	-118.8655	-119.6364	-118.4016	-117.5323
	AIC	-237.7293	-239.2712	-236.8014	-235.063
	BIC	-237.7251	-239.2669	-236.7972	-235.0587
Plackett	η	4.025	4.0204	3.9991	3.9837
	LLF	-129.7077	-129.3832	-129.8478	-128.935
	AIC	-259.4138	-258.7647	-259.6939	-257.8684
	BIC	-259.4096	-258.7605	-259.6897	-257.8641
Frank	λ	2.9351	2.9312	2.9421	2.9301
	LLF	-125.4033	-125.0847	-126.4775	-125.495
	AIC	-250.8049	-250.1676	-252.9534	-250.9884
	BIC	-250.8007	-250.1634	-252.9492	-250.9841
Gumbel	δ	1.4013	1.402	1.3997	1.3975
	LLF	-140.0882	-140.7424	-138.9926	-137.9741
	AIC	-280.1747	-281.4832	-277.9836	-275.9465
	BIC	-280.1705	-281.4789	-277.9794	-275.9423
Rotated-Gumbel	δ	1.4042	1.4022	1.4007	1.3984
	LLF	-140.2673	-139.0239	-137.7934	-136.4927
	AIC	-280.5329	-278.0461	-275.5851	-272.9838
	BIC	-280.5287	-278.0419	-275.5809	-272.9795

جدول شماره ۵-۸: برآورد پارامترهای توابع کاپولا

Copula	Parameter	GARCH-n	GARCH-t	GJR-n	GJR-t
SJC	τ_h	0.2784	0.2825	0.2775	0.2769
	τ_L	0.2781	0.2732	0.2725	0.27
	LLF	-156.4142	-156.1503	-153.8779	-152.4649
	AIC	-312.825	-312.2972	-307.7525	-305.1259
	BIC	-312.8165	-312.2887	-307.744	-305.1174

۵- برآورد ارزش در معرض خطر پرتفوی VaR

از داده‌های نمونه استفاده کرده که شامل 1200 مشاهده می‌باشد و برای تخمین VaR_{1201}در زمان $t = 1201$ به کار می رود. سپس در هر بار مشاهده جدید VaR مجددا تخمین زده می شود. این بدین معناست که VaR_{1202} با استفاده از مشاهدات $t = 2$تا $t = 1201$ و VaR_{1203} با استفاده از مشاهدات $\mathrm{t} = 3$ تا $t = 1202$ همینطور تا آخرین داده تخمین زده می شود. از آنجایی که تعداد نمونه های مورد سنجش ۷۰۰ می باشد، بنابراین تعداد VaR های تخمین زده شده به تعداد 700 عدد می باشد. در جدول (۵-۹) تعداد انحرافات[1] VaR نشان داده شده است. در اینجا بهترین مدل برازش شده با سایر روش های محاسبه VaR مقایسه و نشان داده می شود که مدل ناشی از کاپولا-گارچ جویی-کلیتون متقارن (SJC copula-GARCH n) نوسانات پرتفوی را بهتر از سایر روش ها توضیح می دهد. معیار مورد استفاده برای این سنجش میانگین خطا خواهد بود که در سطح $\alpha = 0.99$ و $\alpha = 0.95$ و $\alpha = 0.9$ مورد آزمون قرار می گیرد.

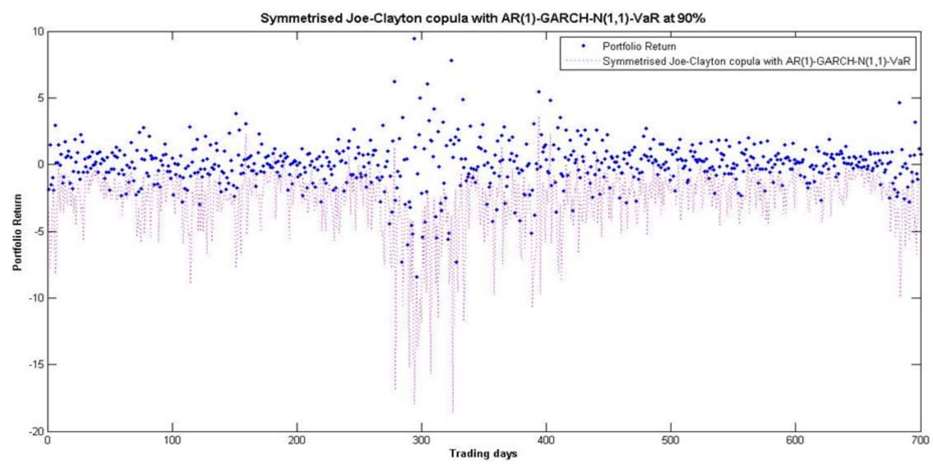
1.Violatios

جدول مقایسه‌ای ارزیابی برآورد ارزش در معرض خطر (VaR)

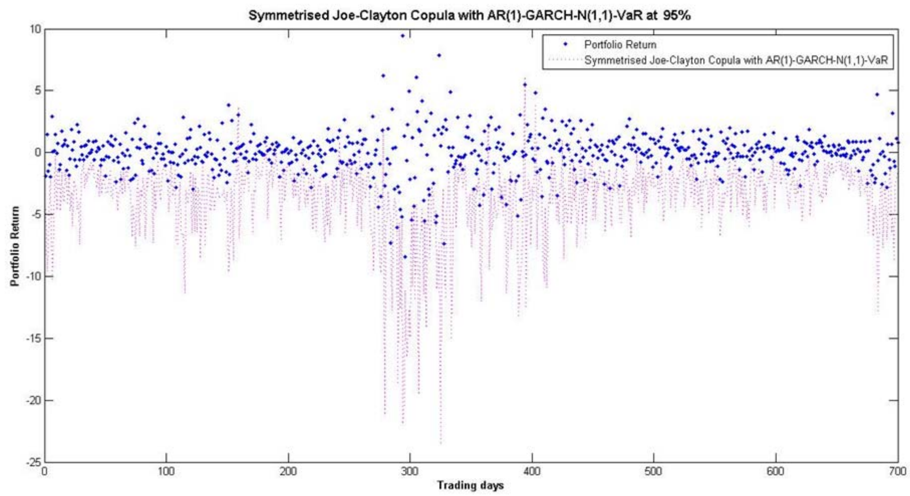
Number of Violation of Estimating VaR

Trading days		700		
α	1%	5%	10%	
Expected no. of violations	7	35	70	Mean Error
SJC copula-GARCH n	7	36	75	2
EWMA	7	44	78	5.6
VC	60	100	124	152
HS	30	96	146	53.3

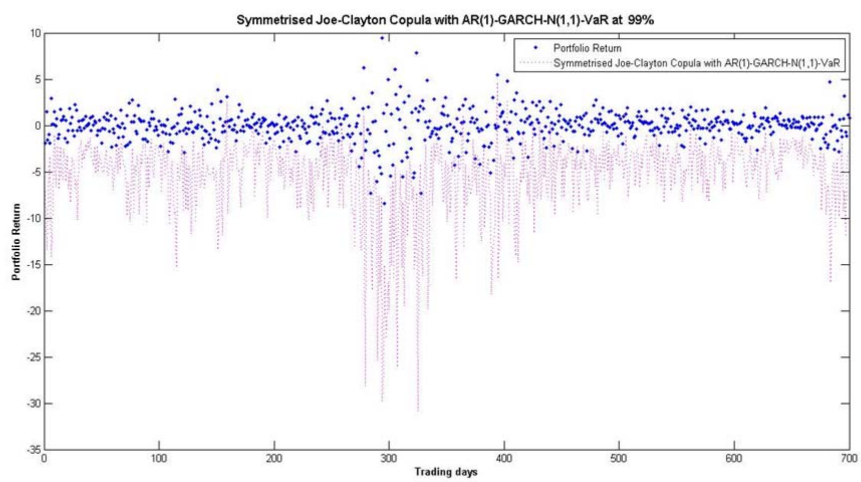
در ادامه برآورد ارزش در معرض خطر (VaR) با استفاده از مدل SJC copula-GARCH n در سطوح اطمینان ٪۹۰، ٪ ۹۶ و ٪۹۹ برآورد و گزارش شده است.



نمودار ۵-۱: برآورد ارزش در معرض خطر با استفاده از مدل SJC copula-GARCH n
در سطح اطمینان ۹۰ درصد



نمودار ۵-۲: برآورد ارزش در معرض خطر با استفاده از مدل SJC copula-GARCH n
در سطح اطمینان ۹۶ درصد



نمودار ۵-۳: برآورد ارزش در معرض خطر با استفاده از مدل SJC copula-GARCH n
در سطح اطمینان ۹۹ درصد

٦- جمع بندی و نتیجه‌گیری:

در این مقاله به اهمیت نوسانات مشتقات پرداختیم و نشان دادیم که با توجه به ویژگی خوشه‌ای بودن نوسانات و وابستگی دنباله‌ای پرتفوی مشتقات فرض نرمال بودن توزیع پرتفوی مشتقات نقش می‌شود؛ بنابراین لپتوکرتیک بودن توزیع بازدهی مشتقات از یک سوی و ناقرینگی ساختار وابستگی بین بازدهی مشتقات لزوم مدل‌سازی نوسانات پرتفوی مشتقات را با استفاده از مدل‌های مناسب روشن می‌سازد. در این مقاله نشان دادیم که توابع کاپولا ابزار مناسبی برای مدل‌سازی ساختار وابستگی مشتقات می‌باشند. در ادامه پرتفویی از دو دارایی مالی معرفی و ارزش در معرض خطر پرتفوی برآورد گردید. ابتدا توزیع حاشیه‌ای بازدهی‌ها با استفاده از خانواده مدل‌های GARCH برآورد و بر اساس آن پارامترهای توابع کاپولا برآورد گردید. نتایج نشان می‌دهد که SJC copula-GARCH n بهترین مدل برای برآورد نوسانات پرتفوی و برآورد ارزش در معرض خطر پرتفوی می‌باشد.

منابع:

الف- فارسی

درخشان، مسعود، مشتقات و مدیریت ریسک در بازارهای بین‌المللی نفت، انتشارات موسسه مطالعات بین‌المللی انرژی، چاپ اول، ۱۳۸۳.

ب- انگلیسی

1- Aas K, Czado C, Frigessi A, Bakken H (2009). “Pair Copula Constructions of Multiple Dependence” Insurance: Mathematics and Economics, 44(2), 182 - 198.
2- Alexandra Dias(2010).” Modeling Exchange Rate Dependence Dynamics at Different Time Horizons”, Journal of International Money and Finance 29,1687–1705.
3- Andrew J. Patton,Copula -Based Models for Financial Time Series1,First version: 31 August 2006. This version: 19 November (2007). Department of Economics and Oxford-Man Institute of Quantitative Finance, University of Oxford.
4- Ausin M C, Lopez H F (2010). “Time Varying Joint Distributions Through Copulas.” Computational Statistics and Data Analysis, 54(11), 2383 - 2399.
5- Bedford T., Cooke R M (2001).”Probability Density Decomposition for Conditionally Dependent Random Variables Modeled by Vines”, Annals of Mathematics and Artificial Intelligence, 32, 245 .268.
6- BollerslevT,Wooldridge J M (1992). “Quasi Maximum likelihood and Inference in Dynamic Models with Time Varying Covariance” Econometric Reviews, 11(2143 .172.
7- Chen X, Yanqin Fan, Victor Tsyrennifov (2004). “E¢ cient Estimation of Semi parametric Multivariate Copula Models” Working Paper 0420, Department of Economics, Vanderbilt University.
8- Cherubini , U. , Luciano,E., Vecchiato,W., (2004). Copula Methods in Finance. John Wiley, NY.
9- Chris Brooks(2006). Introductory Econometrics for Finance, The ICMA Centre, University of Reading, Cambridge University Press.
10-Clayton,D.G,(1978). “A Model for Association in Bivariate Life Table and its Application to a Uranium Exploration Data Set”, Technometrics, 28, 123-131.
11-Clive W.J. Grangera, (2006). “Common factors in conditional distributions for bivariate time series”, Journal of Econometrics ,132 43–57.
12-De Marta S, McNeil A (2005). “The t - copula and related copulas.” International Statistical Review , 73 (1) , 111 - 129.
13-Engle, R. F. (2002). “Dynamic Conditional Correlation: a Simple Class of Multivariate GARCH Models.” Journal of Business and Economic Statistics ,20(3) , 339 .350.
14-Eric Jondeau (2006). The Copula-GARCH Model of Conditional Dependencies: An International Stock Market Application, Journal of International Money and Finance, 25, 827-853.

15-Genest C, Gendron M, Bourdeau - Brien M (2009). “The Advent of Copulas in Finance.” The European Journal of Finance, 15: 7 609 - 618.
16-Genest C, Ghoudi K, Rivest L P (1995). “A Semiparametric Estimation Procedure of Dependence Parameters in Multivariate Families of Distributions”, Biometrica, 82(3) , 543 .552.
17-Hansen, Bruce E. (1994).”Autoregressive Conditional Density Estimation”, International Economic Review. Vol.35,No.3, August.
18-Heinen A, Robles A (2009). “Asymmetric CAPM dependence for large dimensions: The Canonical Vine Autoregressive Copula model.” Available at SSRN: http://ssrn.com/abstract=1297506.
19-Helder Parra Palaro and LuizKoodiHotta,”Using Conditional Copula to Estimate Value at Risk”; State University of Campinas, Journal of Data Science, 4 (2009) ,93-115.
20-HuilingWang_and Xinhua Caiy, Changli He ,”A Copula Based GARCH Dependence Model of Shanghai and Shenzhen Stock Markets” ,D-level Essay in Statistics, June 2011,Dalarna University, Sweden.
21-Hurlimann V (2004). “Fitting bivariate cumulative returns with copulas.” Computational Statistics and Data Analysis , 45(2) , 355 - 372.
22-Jen-Jsung Huang, (2009). “Estimating Value at Risk of Portfolio be Conditional Copula-Garchmethod”, Mathematics and Economics, 45 ,315-324.
23-Joe H, (1997). Multivariate models and dependence concepts. Chapman and Hall,London.
Jondeau E, Rockinger M (2006). “The copula - GARCH model of conditional dependencies: An international stock market application.” Journal of International Money and Finance, 25(5) , 827 - 853.
24-Mashal R, Zeevi A (2002). “Beyond correlation: Extreme co - movements between .nancial assets.” Working paper, Columbia graduate school of business.24
25-Mendez B, Souza R (2004). “Measuring .nancial risks with copulas.” International Review of Financial Analysis, 13(1) , 27 - 45.
26-Patton A J (2006). “Modelling Asymmetric Exchange Rate Dependence.” International Economic Review, 47(2) , 527 .556.
27-Patton A J (2007). “Copula-Based Models for Financial Time Series” in T.G. Andersen, R.A. Davis, J.-P. Kreiss and T. Mikosch (eds.) Handbook of Financial Econometrics.
28-Patton, Andrew J, (2006). Modelling Asymmetric Exchange Rate Dependence, International Economic Review, Vol.47.No.2.May.
29-Patton, Andrew J. (2006). “Estimation of Multivariate Models for Timeseries of Possibly Different Lengths”, Journal of Applied Econometrics. 21: 147–173.

نظرات ناقدین:

۱- ناقد اول: جناب آقای دکتر مسعود درخشان[1]

سوالی که می تواند مطرح باشد این است که چرا در تحقیق شما از آتی‌های ۱۰۰ S&P صد استفاده شده و نه از ۵۰۰ S&P ؟ چراکه این امر می تواند در نتایج تغییر ایجاد نماید.

۱-۱. پاسخ صاحب کرسی: جناب آقای دکتر مرتضی بکی حسکوئی

علت انتخاب، محدودیت دسترسی به اطلاعات بوده است. احتمالاً هنگامی که پرتفوی دامنه گسترده‌ای را شامل شود، نتایج ممکن است تغییر کند. هر کدام از این شاخص‌ها خود یک پرتفوی هستند و اگر دامنه گسترده‌تری از دارایی‌ها را داشته باشیم، ساختار وابستگی‌ها قطعاً تغییر خواهد کرد.

۲- ناقد اول: جناب آقای دکتر مسعود درخشان

در یکی از جداول که انحراف معیار[2] را استخراج کرده بودید؛ وقتی انحراف معیار را برای سنجه‌های[3] مختلف مقایسه می کنیم، همه هماهنگ هستند به غیر از یکی که انحراف معیار کاملاً متفاوتی دارد. اگر شما نمودارهایتان را بیاورید، این نکته معلوم می‌شود. من همان موقع فکر کردم که این به خاطر ماهیت پرتفوهایی باشد که استفاده شده است.

۲-۱. پاسخ صاحب کرسی: جناب آقای دکتر مرتضی بکی حسکوئی

می‌تواند این‌گونه باشد. اما مطابق نتایج همان‌طور که مشاهده می‌شود، انحراف معیارها همگی سازگارند و نتایج برآوردها قابل اعتماد است.

---

۱. عضو هیأت علمی گروه اقتصاد انرژی دانشگاه علامه طباطبایی

2. Standard Error
3. Statistic

۳- ناقد دوم: جناب آقای دکتر عبدالرحیم بادامچی‌زاده[۱]

شما دو دارایی را در نظر گرفته‌اید. اگر دارایی‌های بیشتری را در نظر می‌گرفتید، مشکلات اجرایی‌اش خیلی بیشتر می‌شد و ماشین‌ها (رایانه‌های معمولی) ما جواب نمی‌دهد و این هم مشکلی است که وجود دارد. شما ارزش دارایی را به صورت خوشه‌ای نوشته‌اید و در واقع از یک حرکت Reflecting Browinan استفاده کرده‌اید. همچنین بحثتان با قیمت گذاری بلک – شولز ارتباط پیدا می‌کند و به حرکت براونی و توزیع نرمال تعمیم داده می شود. کلیت بحث این است که ما نوسانی داریم و این در واقع نوعی حرکت Reflecting Browinan داشته و به توزیع چوله نرمال ارتباط دارد. سئوال من این است که آیا جنابعالی ارتباط میان این‌ها را دیده‌اید یا خیر؟

۵-۱. پاسخ صاحب کرسی: جناب آقای دکتر مرتضی بکی حسکوئی

همان‌طور که مشاهده می‌شود نوسانات یکجا تجمیع شده‌اند (خاصیت خوشه‌ای بودن نوسانات) و زمانی که این نوسانات تشدید شده‌اند، تغییر در نوسانات افزایش پیدا کرده است. این یک پدیده‌ای است که ما مشاهده می‌کنیم و آماره‌های توزیع هم نشان می‌دهد که توزیع نرمال نیست. اما هنر مدل‌ساز این است که توزیع مناسب را برازش کند. ما توزیع حاشیه‌ای را بدست آوردیم یعنی خود همان توزیع را برازش نکرده‌ایم زیرا برازش توزیع یک کار مستقل می‌شود. در این تحقیق از توزیع حاشیه‌ای استفاده شده است و در پایان هم کاپولایی که برآورد شده بر همین اساس و با استفاده از توزیع‌های حاشیه‌ای به دست آمده است.

٤- ناقد سوم: جناب آقای دکتر عبدالساده نیسی[۲]

آقای دکتر درخشان و آقای دکتر بادامچی‌زاده نکاتی را مطرح کردند. اما من می‌خواهم از یک دیدگاه دیگری وارد این بحث شوم. فرمایشات شما خیلی کامل بود.

---

۱. عضو هیأت علمی گروه آمار، ریاضی و کامپیوتر دانشگاه علامه طباطبایی

۲. عضو هیأت علمی گروه آمار، ریاضی و کامپیوتر دانشگاه علامه طباطبایی

برای من خیلی مهم نیست که کجای مطالب درست و کجای مطلب نادرست است. همین که یک طرح سئوال جدیدی کردید، به نظر من بسیار با ارزش است.

ما می‌خواهیم که یک مشتقه را تعریف کنیم. این مشتقه روی یک دارایی پایه تعریف می‌شود و بازاری برای مشتقه شکل می‌گیرد که آن بازار وابستگی به دارایی پایه دارد. برای اینکه آن بازار مشتقات را توسعه دهیم و به واقعیت نزدیکتر نماییم؛ بایستی روی آن دارایی پایه کار کنیم. آقای دکتر بکی راجع به دارایی پایه گفتند که به فرض در حالت عادی نمی‌تواند واقعیت‌های بازار ما را به خوبی نشان دهد و منعکس سازد و به صورت یک پیشینه تحقیقی وارد بحث کاپولاها شدند. با این کار اگر GARCHها را در اصل جابجا کنیم، ایشان مدل‌های دارایی پایه را جابجا می‌کنند تا بتوانند با استفاده از آن‌ها مشتقات را توسعه دهند.

من بحثی را به بحث آقای دکتر بکی اضافه می‌کنم. بحث مهم ایشان راجع به تخمین پارامترها بود وقتی ما مدل را عوض می‌کنیم به فرض همان مدلی که آقای دکتر بادامچی‌زاده فرمودند، مدل Brownian Motion را روی مدل بلک - شولز می‌سازیم. آنجا واریانس را خیلی راحت می‌توانیم بدست آوریم. ولی وقتی ثابت کنیم که کارایی‌آن مدل در بازار کم است و جایگزین می‌کنیم، یک مقدار مفاهیم تغییر پیدا می‌کند و دیگر آنجا برآورد پارامترها مثل برآورد پارامترها که این طرف گفته شده نیست و نیاز به کارهای محاسباتی زیادی دارد. در رابطه با برآورد درستنمایی پارامترها می‌توان کار تحقیقاتی مستقلی انجام داد. مثلاً می‌توانیم این برآورد درستنمایی یا این تابع را که در نظر گرفتیم، برای مدل‌های دیگری نظیر بعضی از مدل‌ها که فقط Diffusion هستند و پرش بالا را نمی‌سنجند، به کار بریم. مثلاً شما Regime Switching را در نظر گرفتید. در کشور ما Regime Switchingها خیلی کاربرد دارند و چون تغییرات سیاست در بخش اقتصادی و مالی ما زیاد است، چیزی که این تغییر سیاست را برای ما می‌سنجد، همین Regime Switchingها هستند. علاوه بر آن در کشور ما چیزی که به نظر من خیلی جای تحقیق دارد

پرش‌ها[1] هستند. در قیمت‌های ما پرش‌های خیلی بزرگی است و مدل‌هایی نظیر ARCH و GARCH پرش‌های ما را در نظر نمی‌گیرند. یعنی ما باید وارد مدل‌هایی شویم که پرش‌های بزرگ را در نظر بگیرند. پس با ترکیب مدل‌ها می‌شود یک مدل خوب برای سهام یا دارایی‌های پایه در کشور ما که تلفیقی از پرش‌های بزرگ و Diffusionها بوده و از Regimeهای متفاوت تبعیت می‌کنند، در نظر گرفته شود. نکته دیگری که اینجا انجام نشده و جای کار زیاد دارد این است که ایشان فقط روی دارایی پایه و VaR و .... کار کردند. حالا چگونه می‌توان این‌ها را در مشتقات وارد کنیم. این مسئله جدیدی است که جای کار دارد. آقای دکتر بکی دقیقاً روی دارایی پایه یا سهام کار کردند. ولی اینکه همین کاپولاها را روی همان مدل‌های خودمان در نظر بگیریم و بتوانیم مشتقه را مدل‌سازی کنیم و بدانیم مدل مشتقه به چه صورتی در می‌آید، کاری هست که می‌توان انجام داد.

٦-١. پاسخ صاحب کرسی: جناب آقای دکتر مرتضی بکی حسکوئی

من اینجا مشتقات را در نظر گرفتم. نکته آقای دکتر این است که اگر ما بخواهیم یک اختیار خرید[2] را قیمت گذاری کنیم چه شرایطی دارد. کاپولا کاربرد وسیعی دارد. یک موقع هست که شما با مدل بلک - شولز اختیارات را قیمت گذاری می‌کنید. اگر خواسته باشید اختیار خریدی را قیمت گذاری کنید که قیمت آن به دو دارایی پایه بستگی داشته باشد، بر اساس ساختار وابستگی بین قیمت دارایی‌های پایه می‌توان از توابع کاپولاها استفاده نمود و اختیار خرید را قیمت‌گذاری کرد (که می‌تواند موضوع یک سخنرانی باشد که در آینده ارایه خواهد شد.)

فرمایش شما که گفتید واریانس را در مدل بلک - شولز به دست می‌آوریم، منظور واریانس ضمنی است یعنی آن واریانسی که می‌تواند مدل بلک - شولز را تحقق بخشد و آن برابری را ایجاد کند. با آن فرضی که ما در مورد توزیع در نظر می‌گیریم آن واریانسی که ما می‌توانیم به دست آوریم ضمنی است. آقای دکتر درخشان حضور دارند و اگر بیشتر

1. JUMP
2. Call Option

توضیح دهند ممنون می‌شوم. اینجا بازدهی را داریم. می‌توان اختیار خرید را روی آتی‌ها تعریف کرد که اگر این کار را انجام دهیم آن چیزی که مد نظر شماست حاصل می‌شود. یعنی با فرض اینکه قیمت اختیار از یک مدلی مثل مدل بلک - شولز تبعیت می‌کند و یک فرآیند تصادفی است و حالا چه واریانسی می‌تواند آن مدل را به وجود بیاورد. در واقع آنجا دارایی پایه مشتقه، خودش یک مشتقه است یعنی اختیار خرید روی آتی‌ها تعریف می‌شود.

۵- ناقد اول: جناب آقای دکتر مسعود درخشان

آن وقت باید توجهتان به این باشد که اگر می‌خواهید قیمت اختیار[1] را مدل‌سازی کنید و هم‌زمان اختیار روی دو دارایی را قیمت گذاری کنید بایستی فرضتان این باشد که متغیرهای استوکاستیکی که در اینجا وجود دارد توابع توزیعشان از هم مستقل نیست و اگر مستقل باشد هیچ تأثیری هم ندارد. در این‌گونه موارد چون نا اطمینانی روی قیمت دارایی پایه تأثیر می‌کند بایستی توجه شود متغیرهای استوکاستیکی که روی دارایی پایه تأثیر دارند از هم مستقلند یا نه. بنابراین دوباره بحث آقای دکتر نیسی مطرح می‌شود که باز وارد حوزه دارایی پایه می‌شویم و از حوزه قیمت اختیار خارج می‌شویم. این مسئله نیاز به دقت بیشتری دارد. نکته بعدی تلاطم ضمنی[2] است که این هم باز برمی گردد به تغییر قیمت‌های نسبی در بازار دارایی پایه. باز هم اینجا نکته آقای دکتر نیسی مطرح می‌شود که این هم باز ما را می‌برد به بازار دارایی پایه وگرنه تلاطم یا تلاطم ضمنی اساساً برای قیمت اختیار تعریف نمی‌شود بلکه برای قیمت دارایی پایه تعریف می‌شود . باز نکته آقای دکتر نیسی مهم است یعنی اینجا نیاز به دقت نظر بالایی دارد که چطور ما این دو حوزه را به هم ارتباط دهیم این‌ها خیلی جالب است که شما هم زحمت کشیدید. انشاءالله این‌ها نقطه شروع خیلی مهمی باشد. به امید خدا که دوستان با هم کار کنند. دانشجویان رشته آمار خیلی قوی هستند. ما با این بچه‌ها کار کردیم. هم قوی هستند و هم از درس دادن به آن‌ها لذت

---

1. Option Price
2. Implied Volatility

می‌بریم. به خاطر اینکه خیلی علاقه‌مند هستند. به اقتصادی‌ها برنخورد، اقتصادی‌ها هم خوب هستند، اما من چند ترمی که با بچه‌های آمار کار کردم مجموعاً بچه‌های آمار را خیلی جذاب‌تر دیدم و من مطمئنم که اگر یک رابطه نزدیکی پیدا شود بین بچه‌های ریاضیات مالی و آمار ریاضی، هم آن‌ها بهره‌مند می‌شوند و هم بچه‌های اقتصاد به مراتب بیشتر بهره‌امند می‌شوند و هم خود استادان آمار که بر سر و چشم ما هستند و آن‌ها هم خیلی کمک خواهند کرد و سطح مطالعات اقتصاد بالا می‌رود شما هم بحمدلله زحمت کشیدید و فتح بابی کردید.